Nivel Medio

I-104

Provincia del Neuquén

Patagonia Argentina

COLEGIO NICOLÁS AVELLANEDA NIVEL MEDIO

www.faena.edu.ar **info@faena.edu.ar**

programa

contenido

actividades

bibliografía

CUARTO BLOQUE MATEMATICA

_PARA TENER EN CUENTA:

Si usted desea imprimir este material en color “Negro” (escala de grises) tan solo tiene que escoger la opción “negro” en las opciones de la impresora.

_UNIDAD_1: ECUACIONES LINEALES

- Ecuaciones e inecuaciones lineales.
- Resolución de ecuaciones.
- Ecuaciones de la recta.
- Sistemas de ecuaciones lineales

_UNIDAD_2: NÚMEROS COMPLEJOS

- Definición
- Representación gráfica de los números complejos.
- Complejos conjugados y opuestos.
- Operaciones con números complejos.
- Potencia de números complejos.
- Cociente de números complejos
- Módulo y argumento de un número complejo.
- Formas polar y trigonométrica de un numero complejo.

_UNIDAD_3: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- Relación de conjuntos.
- Ecuaciones de segundo grado y una incógnita.
- Transformación de una ecuación de segundo grado a la forma $ax^2+bx+c=0$
- Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado completas

_UNIDAD_4: POLIEDROS

- Cuerpos geométricos.
- Clasificación de los poliedros.
- Elementos de los poliedros.
- Prismas.
- Cubo.
- Paralelepípedo.
- Pirámide.
- Cuerpos redondos.
- Cilindro.
- Cono.
- Esferas.

ACERCA DE ESTE MODULO

¿QUÉ CONTIENE Y CÓMO SE USA?

Este módulo está compuesto por cuatro unidades en las que se despliegan los contenidos correspondientes al cuarto bloque de Matemática. Para cada unidad encontrará actividades acordes que le permitirán poner en práctica los conceptos estudiados y poner a prueba su aprendizaje, lo cual deja abierta la posibilidad de volver atrás y revisar lo ya aprendido si lo considera necesario.

Al finalizar el módulo encontrará la bibliografía de referencia que le permitirá profundizar en los contenidos trabajados, y responder a las dudas que le suscite la lectura de este material.

La estructura de este módulo de estudio permite visualizar con claridad los conceptos, que se encuentran apartados entre sí, lo cual facilita la elaboración y comprensión de los mismos. Encontrará cuadros, esquemas y palabras resaltadas que colaborarán para una mejor comprensión de los contenidos.

Al final del módulo encontrará actividades de tipo evaluativas que podrán ser tomadas para evaluaciones futuras y que usted puede usar a modo de simulacro, para poner a prueba los conocimientos adquiridos a lo largo de toda la unidad. Se recomienda cumplir con este trabajo de cierre ya que le permitirá relacionar unos contenidos con otros y darle una conclusión al trabajo realizado a lo largo de todo el módulo.

Todo lo que usted aporte a lo propuesto por este material, profundizará su aprendizaje y su dominio sobre la materia. Es un trabajo que depende de cada uno y que se trata de una inversión. “Quien más lee más sabe”, una afirmación casi obvia pero poco practicada. Es de este modo cómo uno logra diferenciarse, crecer y desarrollar un proceso propio.

DESARROLLO DE CONTENIDOS DEL BLOQUE 4. CUARTO AÑO

A modo de introducción:

En este módulo se desarrollan los contenidos del cuarto bloque de matemática. Estos son: ecuaciones lineales, números complejos, funciones de segundo grado y geometría del espacio. En dichos temas se abordarán los contenidos desde lo más general a lo más particular. Se presenta primero la teoría del tema en estudio y luego con ejemplos resueltos por el profesor se observa cómo se tienen que aplicar los contenidos. Y por último viene la ejercitación, en la cual el alumno fija los conceptos aprendidos.

En la unidad 1, se presentan variados temas relacionados. Se empieza con las ecuaciones e inecuaciones lineales y se empieza a dar al alumno práctica en el pasaje de términos. Luego se abordan las distintas formas de expresar una recta y su equivalencia entre ellas. Por último se aprenden a resolver los sistemas de ecuaciones lineales, que son muy útiles en todo el ámbito ingenieril.

Se presenta el tema de los números complejos y todas sus propiedades en la unidad 2. El campo complejo es la última ampliación que se le realizó al campo numérico. Se aprende a graficarlos, y sus distintas formas de expresarlos.

En la unidad 3 se toca el tema de las ecuaciones de segundo grado. El alumno aprenderá a trabajar algebraicamente con ellas. También aprenderá a calcular sus raíces.

Por último se ve el concepto de poliedros. Se muestra una parte de la variada cantidad que existe. Se analizarán en particular los poliedros más simples.

Los contenidos abordados en este módulo constituyen un conjunto básico de saberes que cualquier individuo debe manejar para un buen desarrollo en todo lo que hace a la vida, tanto en el campo personal como laboral.

Les dedicamos un buen y entusiasta recorrido de la materia.

OBJETIVOS PARTICULARES DE CADA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD 1

Al finalizar esta Unidad se deberá lograr:

- Que el alumno pueda resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado.
- Que logre identificar las distintas formas de expresar una recta.
- Que sepa resolver de manera analítica y gráfica sistemas de ecuaciones lineales.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD 2

Al finalizar esta Unidad se deberá lograr:

- Que el alumno sepa reconocer un número complejo.
- Que sepa representarlo gráficamente.
- Que pueda operar con ellos sin dificultad.
- Que maneje las distintas formas de expresarlos

OBJETIVOS DE LA UNIDAD 3

Al finalizar esta Unidad se deberá lograr:

- Que demuestre habilidad para transformar ecuaciones de segundo grado.
- Que sepa resolver sus raíces.

- Que sepa utilizar correctamente Bascara.
- Que maneje las propiedades de las soluciones.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD 4

Al finalizar esta Unidad se deberá lograr:

- Que reconozca distintos tipos de cuerpos geométricos.
- Que reconozca a los poliedros.
- Que sepa calcular áreas y volúmenes de los poliedros más simples.

UNIDAD: ECUACIONES LINEALES

ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES

Ecuación es toda función algebraica igualada a 0 ó a otra igualdad algebraica. A la primera parte de la igualdad se la llama 1^{er} término y a la segunda se la llama 2^{do} término. Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen el mismo resultado.

Inecuación es toda función algebraica donde aparece un signo >, <, ≥ ó ≤.
Ejemplo: $2x + 5 \leq 8$ se resuelve igual que las ecuaciones.

Hay distintos tipos de igualdades:

Una igualdad numérica: $2 + 5 = 4 + 3$
Una igualdad algebraica: $2x + 3x = 6x$
Una función: $3x + 2 = y$

Una **función** es una expresión algebraica igualada a y.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Para resolver una ecuación, hallaremos el valor de la incógnita, siendo la incógnita el número desconocido, expresado normalmente por x.

Pasos para resolver una ecuación:

1º- Se quitan los paréntesis si los hubiere.
2º- Se pasan todas las incógnitas al 1er miembro de la igualdad.
3º- Se reducen los términos semejantes.
4º- Hallamos el valor de la incógnita.

Ejemplo:

$\mathbf{5x - 7 = 28 + 4x \Rightarrow 5x - 4x = 28 + 7 \Rightarrow x = 35}$

$\mathbf{5x - 7 = 2 + 4x \Rightarrow 5x - 4x = 2 + 7 \Rightarrow x = 9}$

Ecuaciones con denominadores:

Quitamos los denominadores por el m.c.m. Para ello:

1. Hallamos el m.c.m. de los denominadores.
2. Ese es el denominador común y lo sustituimos por los denominadores anteriores.
3. Se divide el m.c.m. entre el denominador antiguo y se multiplica el resultado por el numerador.

Ejemplo:

$$\frac{x}{2} - 4 = \frac{x}{3} - 3 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = -3 + 4 \Rightarrow \frac{3x - 2x}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6$$

<u>Inecuaciones:</u>

Se trabajan igual que las ecuaciones.

Ejemplo:

$-3x + 6 < 0 \Rightarrow -3x < -6 \Rightarrow x > (-6) : (-3) \Rightarrow x > 2$

$\Rightarrow x \in (2 ; +\infty)$

<u>Nota:</u> En una desigualdad cuando el número que esta multiplicando o dividiendo a la incógnita es **negativo** se cambian ambos signos de la desigualdad y se invierte el sentido de la desigualdad.

+ ∞ y **−** ∞ llevan siempre paréntesis al expresar el conjunto solución, dado que no son números sino símbolos matemáticos.

Si la desigualdad es **>** o **<** se utilizan paréntesis para el conjunto solución.

Si la desigualdad es $\geq$ o $\leq$ se utilizan corchetes.

Ejemplo:

$$x > 3 \Rightarrow x \in (3 ; +\infty)$$

$$x < 4 \Rightarrow x \in (-\infty ; 4)$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x \in [2 ; +\infty)$$

$$x \leq -5 \Rightarrow x \in (-\infty ; -5]$$

En el intervalo del conjunto solución siempre se escribe a la izquierda el número menor del intervalo.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una expresión algebraica con dos incógnitas es lo que llamamos **sistema de ecuaciones.**

Todo sistema de ecuaciones necesita tantas ecuaciones como incógnitas tenga.

Sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

Para resolver un sistema de ecuaciones podemos utilizar cuatro métodos:

1º- Método de sustitución.

2º- Método de igualación.

3º- Método de reducción o de sumas y restas.

4º- Método gráfico.

Resolver un sistema por el método de sustitución:

Quitamos los paréntesis (si los hubiere) de las dos ecuaciones.

Quitamos los denominadores (si los hubiere) de las dos ecuaciones.

1º- Despejamos una incógnita de una ecuación y la sustituimos en la otra ecuación.

2º- Resolvemos la ecuación resultante.

3º- El valor hallado lo reemplazamos en cualquier ecuación (del sistema dado), para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

(1º) Despejando **y** en la primera ecuación **$y = 4 - 4x$**

(1º) reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$$2x - 3(4 - 4x) = -5$$

(2º) resolviendo tenemos:

$2x - 12 + 12x = -5$

$14x = -5 + 12$

$x = 7 / 14$

$\mathbf{x = 1 / 2}$

(3º) luego el valor de x se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado y se obtiene el valor de **y**

$4x + y = 4$

$y = 4 - 4x$

$y = 4 - 4(1/2)$

$y = 4 - 2$

$\mathbf{y = 2}$

<u>Resolver un sistema por el método de igualación:</u>

Quitar los paréntesis (si los hubiere) de las dos ecuaciones.

1º- Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.

2º- Igualar las incógnitas despejadas y resolver la ecuación resultante.

3º- El valor hallado lo reemplazamos en cualquier ecuación (del sistema dado), para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{4x + y = 4} \\ \mathbf{2x - 3y = -5} \end{cases}$$

(1º) Despejando **y** en las dos ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{y = 4 - 4x} \\ \mathbf{y = 5 / 3 + 2 / 3\, x} \end{cases}$$

(2º) igualando tenemos

$$\mathbf{4 - 4x = 5 / 3 + 2 / 3\, x}$$

(2º) resolviendo tenemos:

$$-4x-\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}-4$$

$$\frac{-12x-2x}{3}=\frac{5-12}{3}\Rightarrow-\frac{14x}{3}=-\frac{7}{3}$$

$$x=-\frac{7}{3}:\left(-\frac{3}{14}\right)$$

x = $\frac{1}{2}$

(3º) de igual manera que en el método anterior se obtiene el valor de y.

y = 2

<u>Resolver un sistema por el método de reducción o de sumas y restas:</u>

Quitamos los paréntesis (si los hubiere) de las dos ecuaciones.

1º- Igualar los coeficientes de una incógnita (multiplicando a las ecuaciones por números adecuados) y cambiar de signo si son iguales.

2º- Sumar o restar el sistema que ha quedado al multiplicar y resolver la ecuación resultante. (Si los coeficientes igualados son de igual signo se restan y si son de distinto signo se suman).

3º- Se aplican los pasos 1º y 2º para la otra incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

(1º) Multiplicamos la segunda ecuación por 2

(2x –3y = -5)•2

4x–6y = -10

(2º) y se la restamos a la primera, obteniendo así:

$$\begin{array}{rl} & 4x + y = 4 \\ - & 4x - 6y = -10 \\ \hline & 0x + y - (-6y) = 4 + 10 \end{array}$$

(2º) **y + 6y = 4 + 10**

luego: **7y = 14**

y = 14 / 7

y = 2

(3º) de igual manera que en los pasos 1º y 2º se obtiene el valor de x.

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y luego se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{rl} & 12x + 3y = 12 \\ + & \\ & \underline{2x - 3y = -5} \\ & 14x \qquad = 7 \end{array}$$

$$x = \frac{7}{14} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

<u>Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones.</u>

1º- Se despeja **y**, se la deja en función de x.

2º- Se grafican las 2 ecuaciones.

Pueden pasar tres casos:

_ si las rectas se interceptan, el <u>punto</u> intersección es **la solución única**. Las coordenadas del punto son los valores de **x** e **y** buscados.

_ si las rectas no se interceptan, esto indica que son paralelas, y además que no hay punto solución. Por lo tanto **no existe solución** que satisfaga al sistema.

_ Si las dos rectas son iguales (rectas superpuestas) hay **infinitas soluciones**.

<u>Retomando al ejemplo anterior:</u>

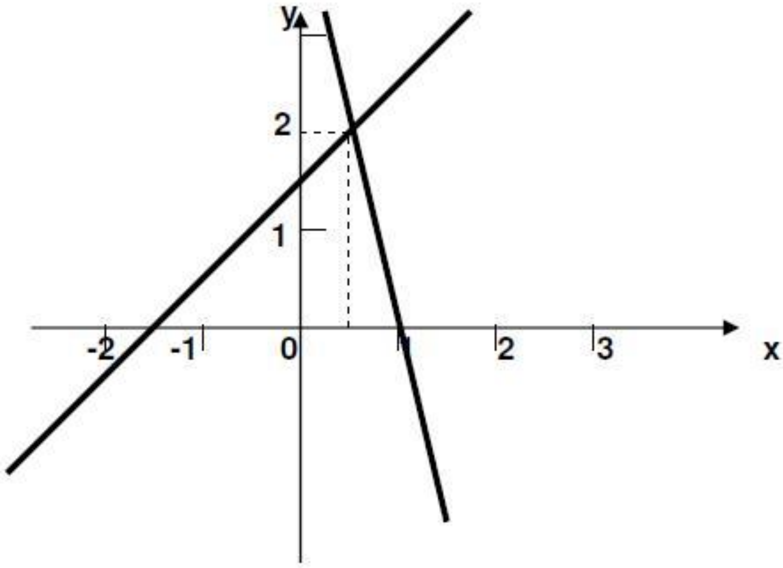
$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

(1º) Despejando y en las dos ecuaciones

y = 4 –4x

y = 5/3 +2/3 x

Y por último se las grafica:



Las coordenadas del punto intersección son:

- **x = 1 / 2**
- **y = 2** (como puede corroborarse analíticamente con el ejemplo anterior)

contenido

RESOLUCION DE PROBLEMAS APLICANDO SISTEMA DE ECUACIONES

En una bicicletería hay bicicletas y triciclos ¿cuantas hay de cada clase si se cuentan 40 manubrios y 95 ruedas?

Llamaremos **x** a las bicicletas e **y** a los triciclos.

$$\begin{cases} x + y = 40 & \Rightarrow y = 40 - x \quad \text{(x + y es la suma de manubrios)} \\ 2x + 3y = 95 & \text{(Cada bicicleta tiene 2 ruedas y cada triciclo 3)} \end{cases}$$

Aplicando el método de sustitución

$2x + 3(40 - x) = 95$

$2x + 120 - 3x = 95$

$2x - 3x = 95 - 120$

$-x = -25$

$x = (-25) : (-1)$

$x = 25$

$y = 40 - x$

$y = 40 - 25$

$y = 15$

Rta.: Hay 25 bicicletas y 15 triciclos.

EJERCICIOS UNIDAD 1:

1) Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $3(2x - 2) + 2 = 4x + 4$

b) $3x - 6 + \sqrt{4} = 6x + 6 - 10$

c) $4(2x + 3) = 3(2x + 2) - 4$

d) $9x - \sqrt{49} - 2x = 2x + (-2)^2 + \sqrt{16}$

2) Resolver las siguientes inecuaciones y expresar el conjunto solución.

a) $5x - 4 > 3x + 2$

b) $6x - 5 \leq 3x + 7$

c) $7x + 8 \geq 2x - 7$

d) $2x + 5 > 4x - 3$

3) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -3x - 4y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2x + 3y = -5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$

4) Resolver los siguientes problemas utilizando sistema de ecuaciones.

a) En un corral hay gallinas y conejos ¿Cuántos animales de cada clase hay si se cuentan 50 cabezas y 144 patas?

b) Calcular los lados de un rectángulo sabiendo que la base es el doble de la altura y que su perímetro es 24 cm.

c) El perímetro de un triangulo isósceles es de 27 cm y la diferencia entre uno de los lados iguales y la base es de 3 cm. Calcular la longitud de cada lado.

d) La mitad de un número es igual a la tercera parte de otro. ¿Cuáles son dichos números si su suma es 10?

e) El perímetro de un rectángulo es de 24 cm. Y la diferencia entre la base y la altura es de 2 cm. Calcular el área del rectángulo. (Área = b · h)

<u>RESPUESTAS:</u>

1)

a) $x = 4$

b) $x = 0$

c) $x = -5$

d) $x = 3$

2)

a) $x > 3 \Rightarrow x \in (3\ ;\ +\infty)$

b) $x \leq 4 \Rightarrow x \in (-\infty\ ;\ 4]$

c) $x \geq 3 \Rightarrow x \in [3\ ;\ +\infty)$

d) $x < 4 \Rightarrow x \in (-\infty\ ;\ 4)$

3)

a) $x = 3\ ;\ y = -2$

b) x = 2 ; y = 4

c) x = 2 ; y = 2

d) x = 1 ; y = 5

e) x = -2 ; y = -3

4)

a) 22 conejos y **28 gallinas**

b) base = 8 cm y **altura = 4 cm**

c) Lados iguales = 10 cm c/u y **base = 7 cm**

d) 4 y 6

e) Base = 7 cm ; altura = 5 cm y **área = 35 cm^2**

UNIDAD 2: NUMEROS COMPLEJOS:

DEFINICION

Los algebristas del los siglos XV y XVI, al buscar una solución para algunas ecuaciones de segundo grado, por ejemplo $x^2 + 1 = 0$, se encontraron con

x = ± $\sqrt{-1}$

Afirmaban que las ecuaciones no tenían solución, ya que no hay ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo.

Este hecho implicaba la conveniencia de "definir" nuevos números de la forma: **a + b · i** donde a y b son números reales e **i =** $\sqrt{-1}$, que permitieran resolver cualquier ecuación de segundo grado. Estos nuevos números se llaman **números complejos (C).**

Se llama número complejo a toda expresión de la forma **z = a + bi** donde a y b son números reales; i es la unidad llamada imaginaria, definida por las ecuaciones: **i =** $\sqrt{-1}$ **o** $\mathbf{i^2 = -1}$; a es la parte real y b es la parte imaginaria del número complejo.

Si a = 0, el número complejo **0 + bi = bi**, es un número imaginario puro; si b =0, se obtiene el número real **a + 0i = a**

Dos números complejos son iguales si:

(a + b · i) = (c + d · i) ⇔ a = c ; c = d , es decir, si son iguales sus partes reales e imaginarias por separado.

Un número complejo es igual a cero si: **a + b · i = 0 ⇔ a = 0 ; b = 0**

Los números complejos son la última de las sucesivas ampliaciones de los sistemas numéricos. En C son posibles todas las operaciones aritméticas y todas las ecuaciones algebraicas con coeficientes numéricos, propiedad que se expresa diciendo que el **conjunto C es algebraicamente cerrado.**

Siendo $\mathbf{i^2 = -1}$

Si $\quad \mathbf{x = \pm} \sqrt{-4}$

$\mathbf{x = \pm} \sqrt{4 \cdot (-1)}$ $\qquad$ **(−4 = 4(−1)** Escritos en forma distinta)

$\mathbf{x = \pm} \sqrt{4 \cdot i^2}$ $\qquad$ **($-1 = i^2$)**

$\mathbf{x = \pm 2i}$

POTENCIAS DE NUMEROS COMPLEJOS

Calculemos las potencias de la unidad imaginaria i.

$i^0 = 1$ por convenio.

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2\, i = -i$

$i^4 = i^2\, i^2 = 1$

$i^5 = i^4\, i = i$

Cualquier potencia de i cuyo exponente sea mayor a 3 equivale a una de las primeras cuatro potencias expresadas anteriormente (i^0 ,i^1,i^2 ,i^3) para hallarla se divide el exponente por 4 y el resto de la división (que puede ser 0 , 1 , 2 o 3) es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

$i^{35} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

$i^{38} = i^2 = -1$

$$\begin{array}{r|l} 38 & 4 \\ \hline 2 & 9 \end{array}$$

$i^{24} = i^0 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 4 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

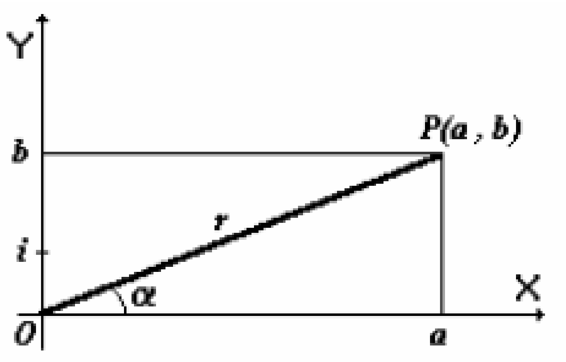
REPRESENTACIÓN GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Sobre el eje de abcisas se representa la parte real **a** del número complejo y sobre el eje de ordenadas la parte imaginaria **b**. El número complejo **a+bi=(a;b)** queda representado por el punto P(a,b) del plano de coordenadas.

A cada número complejo (a;b) corresponde un punto P que se llama su afijo, y recíprocamente, a cada punto corresponde un número complejo.
Si **z = a + bi** la llamaremos **forma binómica** del número complejo z. Cuando aparezca escrito como **(a ; b)** diremos que está en **forma cartesiana**.

El origen de coordenadas O y el punto P determinan un vector $\overrightarrow{OP}$ que se puede considerar la **representación vectorial** del número complejo **(a ; b)** . La longitud r del vector $\overrightarrow{OP}$ se llama **módulo** del número complejo **a + bi** y su expresión es $\mathrm{r} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Al eje de abscisas OX se le suele llamar **eje real**, y al eje de ordenadas OY eje imaginario.



contenido

COMPLEJOS CONJUGADOS Y COMPLEJOS OPUESTOS

Dos números complejos se llaman **conjugados** si tienen iguales sus componentes reales y opuestas sus componentes imaginarias. Se expresan de la forma siguiente: $\mathbf{z = a + bi}$ y $\bar{z}$ $\mathbf{= a - bi}$. Gráficamente son simétricos respecto del eje real (eje de abcisas). Al conjugado de **Z** se lo expresa $\bar{Z}$

Ejemplo:

Si $\mathbf{z = 2 + 3i}$ entonces $\bar{z}$ $\mathbf{= 2 - 3i}$

Si $\mathbf{z = -6 + 7i}$ entonces $\bar{z}$ $\mathbf{= -6 - 7i}$

Si $\mathbf{z = 4 - 5i}$ entonces $\bar{z}$ $\mathbf{= 4 + 5i}$

Si $\mathbf{z = -8 - 9i}$ entonces $\bar{z}$ $\mathbf{= -8 + 9i}$

Dos números complejos se llaman **opuestos** si tienen <u>opuestas sus dos componentes</u>. Se expresan de la forma siguiente: $\mathbf{z = a + bi}$ y $\mathbf{-z = -a - bi}$. Gráficamente son simétricos respecto del origen de coordenadas.

Ejemplo:

$z = 4 - 3i \Rightarrow -z = -4 + 3i$

$z = 2 + 5i \Rightarrow -z = -2 - 5i$

$z = -3 - 2i \Rightarrow -z = 3 + 2i$

contenido

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

A. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS. PROPIEDADES

Consideremos los números complejos: **z = (a,b) y z' = (c,d)**

Definimos: **z + z' = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)**

En forma **binómica**: **(a + bi) + (c + di) = (a + c)+ (b + d)i**

Ejemplo:

(2,3) + (5,6) = (2+5, 3+6) = (7,9).

(3 + 2i)+ (2 + 4i) = 5 + 6i

Para restar dos complejos se puede en lugar de restar, sumar el opuesto del sustraendo.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

(5 + 3i)− (2 − 3i) = (5 + 3i)+ (− 2 + 3i) = 3 + 6i

Propiedades:

1. Asociativa. [(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)]
2. Conmutativa. (a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)
3. Existencia de elemento neutro. (0,0)
4. Existencia de elemento opuesto. Opuesto de (a,b) = (-a,-b).

Los números complejos (a,b) y (-a,-b) son simétricos respecto del origen.

B. PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS. PROPIEDADES

Para multiplicar dos complejos resulta conveniente expresarlos en forma binómica y luego multiplicar aplicando distributiva.

Ejemplo:

$z_1 = (3;2)$
$z_2 = (4;-2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{z_1 \bullet z_2} &\mathbf{= (3 + 2i)\bullet(4 - 2i) = 3\cdot 4 + 3\cdot(-2i) + 2i\cdot 4 + 2i\cdot(-2i)} \\ &\mathbf{= 12 - 6i + 8i - 4i^2} \qquad \text{recordar que } \mathbf{i^2 = -1} \\ &\mathbf{= 8 + 2i - 4\cdot(-1) = 8 + 2i + 4} \\ &\mathbf{= 12 + 2i} \end{aligned}$$

Producto de complejos conjugados

$\mathbf{(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2}$

El producto de dos complejos conjugados da como resultado un número real que es la suma del cuadrado de la componente real menos el cuadrado de la componente imaginaria y como $i^2 = -1$, queda la suma de los cuadrados de las componentes.

Ejemplo:

$\mathbf{(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - 3^2i^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13}$
$\mathbf{(3 + 3i)(3 - 3i) = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18}$

El producto de complejos conjugados se utiliza para resolver la división de complejos, dado que al igual de la nacionalización de denominadores en los números reales, debo racionalizar el denominador, es decir eliminar la componente imaginaria del denominador.

COCIENTE DE NUMEROS COMPLEJOS

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \bullet \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

En la práctica se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 1:

$$\frac{(4+3i)}{(2+2i)} = \frac{(4+3i)}{(2+2i)} \bullet \frac{(2-2i)}{(2-2i)} = \frac{4\cdot 2+4\cdot(-2i)+3i\cdot 2+3i\cdot(-2i)}{2^2+2^2} =$$

$$= \frac{8-8i+6i-6i^2}{4+4} = \frac{8-2i-6\cdot(-1)}{8} = \frac{8-2i+6}{8} = \frac{14-2i}{8} = \frac{14}{8} - \frac{2i}{8} =$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{4}i$$

Ejemplo 2:

$$\frac{(4-4i)}{(-3-2i)} = \frac{(4-4i)}{(-3-2i)} \bullet \frac{(-3+2i)}{(-3+2i)} = \frac{-12+8i+12i-8i^2}{(-3)^2+2^2} = \frac{-12+20i+8}{9+4} =$$

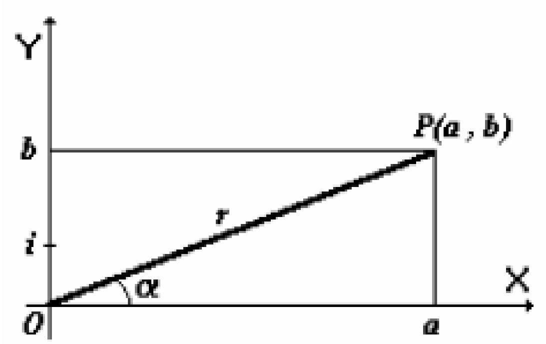
$$= \frac{-4+20i}{13} = \frac{-4}{13} + \frac{20i}{13}$$

MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo z = (a,b) = a + bi queda determinado también mediante otros dos elementos que definimos a continuación.

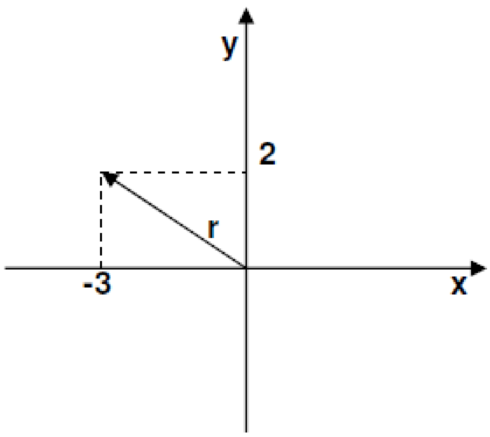
Módulo del número complejo z, es el módulo del vector. Lo representaremos por: **r = |z|** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento del número complejo z, es el ángulo que el eje positivo de abscisas forma con la semirrecta de origen O que contiene al afijo de z. No se define el argumento del número complejo (0,0)



Ejemplo:

z = -3 + 2 i



FORMAS POLAR Y TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

De la figura anterior se deduce:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \frac{b}{a} = \operatorname{Tan}\alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcTan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Estas expresiones permiten calcular el módulo y el argumento de un número complejo z conocidas sus componentes cartesianas.

Así, el número complejo z = a + bi se puede escribir de la siguiente manera:

$z = (r ; \alpha) = (r)_\alpha$ FORMA POLAR

Conocidos el módulo y el argumento se obtienen las componentes cartesianas recordando la definición de seno y coseno de un ángulo.

$$\left.\begin{array}{l} a = r \cdot \cos\alpha \\ b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \cdot i = (r \cdot \cos\alpha) + (r \cdot \operatorname{sen}\alpha) \cdot i = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$$

Así, el número complejo z = (r ; α) se puede escribir de la siguiente manera:

$z = r(\cos\alpha + i\ \operatorname{sen}\alpha)$ FORMA TRIGONOMÉTRICA

Si z = (2 ; 30º) entonces z = 2(cos30º + i sen30º)

Ejemplo:

z = 3 + 3i

$$\text{Tan}\,\hat{\alpha} = \frac{b}{a} = \frac{3}{3} = 1$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\hat{\alpha} = \text{arcTan}\left(\;\right)$$

$$\hat{\alpha} = 45º$$

z = ($\sqrt{18}$;45º) z = $\sqrt{18}$ (cos45º + i · sen45º)

Las últimas relaciones nos dan las igualdades siguientes entre las diversas formas de escribir un número complejo z:

z = (a,b) = a + bi = $(r)_\alpha$ = r (cosα + isenα)

Al pasar de la forma cartesiana o binómica a la forma polar o trigonométrica, en el cálculo del argumento ($\hat{\alpha}$) se deberá tener en cuenta lo siguiente:

1) El ángulo $\hat{\alpha}$ se mide a partir del semieje positivo de las abscisas (de las x) y en el sentido contrario a las agujas del reloj. (si se mide en el sentido de las agujas del reloj el ángulo se considera negativo).

2) La calculadora solo da valores de la tangente de ángulos del primer y cuarto cuadrante del sistema de ejes cartesianos, es decir que si el complejo está en el 2º cuadrante lo toma como si fuese en el 4º cuadrante y además negativo dado que lo mide en el sentido horario y si el complejo esta en el 3º cuadrante da un ángulo del 1º cuadrante.

3) Para hallar el valor real de $\hat{\alpha}$ es conveniente como primer paso graficar el complejo para saber en que cuadrante está, pudiendo ocurrir lo siguiente:

a) Si esta en el 1º cuadrante, el valor que da la calculadora es el valor real de $\hat{\alpha}$

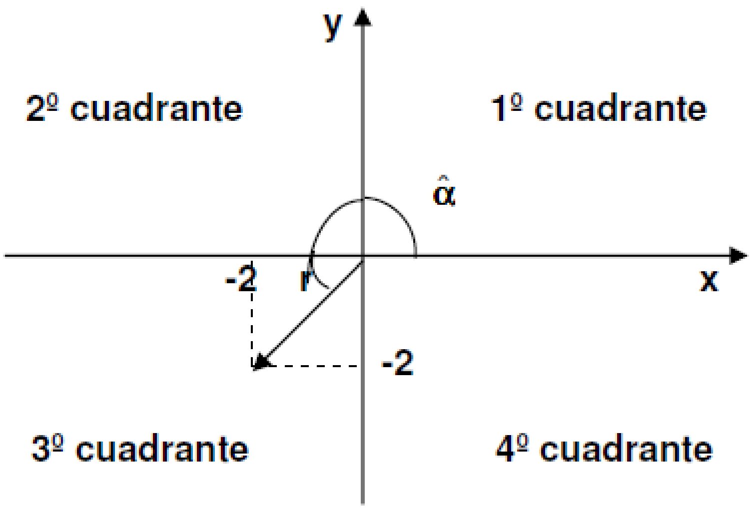
b) Si el complejo esta en el 2º cuadrante, al valor que da la calculadora hay que sumarle 180º.

c) Si el complejo esta en el 3º cuadrante, al valor que da la calculadora hay que sumarle 180º.

d) Si el complejo esta en el 4º cuadrante, al valor que da la calculadora hay que sumarle 360º.

Ejemplo 1:

z = −2 − 2i



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\text{Tan}\,\hat{\alpha} = \frac{b}{a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\hat{\alpha} = \text{arcTan}\,(1)$$

$$\hat{\alpha} = 45^{o} \Rightarrow \hat{\alpha} = 45^{o} + 180^{o}$$

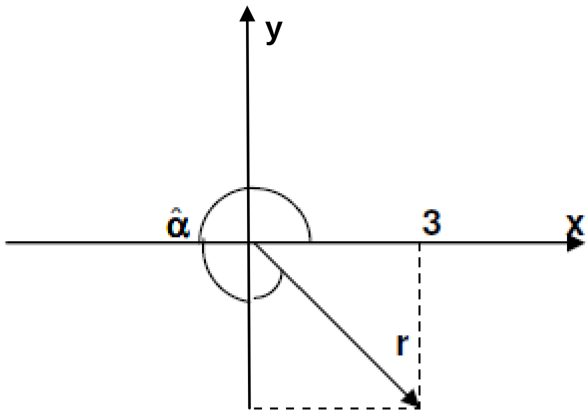
$$\hat{\alpha} = 225^{o}$$

z = ($\sqrt{8}$; 225º)   **forma polar**

z = $\sqrt{8}$ (cos225º + i · sen225º)   **forma trigonométrica**

Ejemplo 2:

z = 3 − 3i



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\mathrm{Tan}\,\hat{\alpha} = \frac{b}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\hat{\alpha} = \mathrm{arcTan}\,(-1)$$

$$\hat{\alpha} = -45^{\circ} \Rightarrow \hat{\alpha} = -45^{\circ} + 360^{\circ}$$

$$\hat{\alpha} = 315^{\circ}$$

z = ($\sqrt{18}$; 315º)   **forma polar**

z = $\sqrt{18}$ (cos315º + i · sen315º)   **forma trigonométrica**

EJERCICIOS UNIDAD 2:

1) Dado el complejo z = -2 + 3i , calcular.

- **a) Su opuesto**
- **b) Su conjugado**
- **c) El conjugado de su opuesto**
- **d) El opuesto de su conjugado**
- **e) ¿Qué relación existe entre lo obtenido en c(y d)**

2) Dados los complejos $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 + 2i$; $z_3 = -4 - 5i$ y $z_4 = 4 + 3i$ Calcular:

- **a)** $z_1 + z_2$
- **b)** $z1 + z_3$
- **c)** $z_2 - z_3$
- **d)** $z_3 - z_4$
- **e)** $\overline{z_1 + z_4}$
- **f)** $\overline{z_1} + \overline{z_2}$
- **g)** $z_1 \bullet z_2$
- **h)** $z_1 \bullet z_3 + z_2 \bullet z_4$
- **i)** $\frac{z_1}{z_2}$
- **j)** $\frac{z_3}{z_4}$
- **k)** $\frac{z_4}{z_3} + z_2$ Se recomienda racionalizar el 1º termino y luego resolver la suma utilizando común denominador.
- **l)** $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_4}$

m) $\dfrac{z_3 + z_2}{z_4}$

3) Pasar cada uno de los siguientes complejos a la forma polar y trigonométrica.

a) z = 4 + 3i

b) z = −4 + 4i

c) z = −2 − 2i

d) z = 5 − 5i

e) z = −2 − 5i

4) Pasar a la forma binómica.

a) z = $\sqrt{18}$ (cos135º + i · sen135º)

b) z = $\sqrt{8}$ (cos225º+i · sen225º)

c) z = $\sqrt{32}$ (cos45º+i · sen45º)

RESPUESTAS EJERCICIOS UNIDAD 1

1)

a) −z = 2 − 3i

b) $\bar{z}$ = −2 − 3i

c) $\overline{-z}$ = 2 + 3i

d) $-\bar{z}$ = 2 + 3i

e) El conjugado del opuesto y el opuesto del conjugado son iguales

2)

a) 5 + 4i

b) –1 – 3i

c) 6 + 7i

d) – 8 – 8i

e) 7 – 5i

f) 5 – 4i

g) 2 + 10i

h)0 – 9i

i) $\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{i}$

j) $\frac{31}{25}-\frac{8}{25}\mathrm{i}$

k) $\frac{51}{41}+\frac{90}{41}\mathrm{i}$

l) $\frac{38}{25}+\frac{34}{25}\mathrm{i}$

m) $-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$

3)

a) z = (5;36º52’12”)

z = 5(cos36º52’12” + i sen36º52’12”)

b) z = ($\sqrt{32}$**;135º)**

z = $\sqrt{32}$ **(cos135º + i sen135º)**

c) z = ($\sqrt{8}$**;225º)**

z = $\sqrt{8}$ **(cos225º + i sen225º)**

d) z = ($\sqrt{50}$**;315º)**

z = $\sqrt{50}$ **(cos315º i sen315º)**

e) z = ($\sqrt{29}$**;248º11’55”)**

z = $\sqrt{29}$ **(cos248º11’55” + i sen248º11’55”)**

4)

a) z = −3 + 3i

b) z = −2 − 2i

c) z = 4 + 4i

_UNIDAD_3: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:

ECUACIONES DE 2º GRADO Y UNA INCÓGNITA

Una *ecuación* con una incógnita es de **segundo grado** si el exponente de la incógnita es dos.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita son:

$$3x^2-2x+1=5; \qquad 2x^2-3=2; \qquad 4x^2-2x+1=0; \qquad \frac{x+1}{x-1}=2x$$

Esta última ecuación parece, de primer grado, pero si se opera en ella, resulta: $\mathbf{x + 1 = 2x\cdot(x - 1) \Rightarrow x + 1 = 2x^2 - 2x}$, se observa que es una ecuación de segundo grado.

Cualquier ecuación de segundo grado puede, mediante transformaciones, expresarse en la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, donde **a**, y **b** son los coeficientes de los términos $\mathbf{x^2}$ y **x** respectivamente y **c** es el término independiente.

1.1. Ecuación de segundo grado completa

Una ecuación de segundo grado es **completa** cuando los tres coeficientes a, b, y c son distintos de cero. La expresión de una ecuación de segundo grado completa es $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

1.2. Ecuación de segundo grado incompleta

Una ecuación de segundo grado es incompleta cuando los términos b ó c, o ambos, son cero.

(Si a = 0, la ecuación resultante sería **bx + c = 0**, que no es una ecuación de segundo grado.)

<u>La expresión de una ecuación de segundo grado incompleta es:</u>

$ax^2 = 0$;	**si b = 0**	**y**	**c = 0.**
$ax^2 + bx = 0$;	**si c = 0.**		
$ax^2 + c = 0$;	**si b = 0.**		

TRANSFORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO A LA FORMA $ax^2 + bx + c = 0$

Para transformar una ecuación cualquiera de segundo grado en la forma: **$ax^2 + bx + c = 0$**, se siguen, los siguientes pasos:

a)Se quitan paréntesis, teniendo en cuenta el signo que les precede.

b)Se quitan los denominadores multiplicando la ecuación por el mínimo común múltiplo de los mismos.

c)Se pasan todos los términos de la ecuación al mismo lado del signo =.

d)Se reducen los términos semejantes.

e)Se ordenan los términos según el orden decreciente de los exponentes de x: **$ax^2 + bx + c = 0$**.

Una vez obtenida esta expresión, si la ecuación puede simplificarse, porque todos sus coeficientes sean múltiplos de algún número, debe hacerse, con el fin de facilitar las operaciones posteriores.

Si el término en x^2 fuese negativo, se multiplicaría toda la ecuación por -1, obteniéndose así otra ecuación equivalente con el término de mayor grado positivo.

EJEMPLOS: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Expresar la ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 5$ en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, indicando los valores de los coeficientes a, b y c.

Resolución:

Se pasan todos los términos al mismo lado del signo =, y se reducen los términos semejantes:

$3x^2 - 2x + 1 - 5 = 0 \Rightarrow \mathbf{3x^2 - 2x - 4 = 0}$

a = 3 es el coeficiente del término en x^2.

b = -2 es el coeficiente del término en x.

c = -4; es el término independiente.

La ecuación es completa. Ninguno de sus coeficientes es cero.

2. Expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ la ecuación $\frac{15}{x} = 8 + x$

Resolución:

1. La x que está dividiendo en el primer miembro pasa a multiplicar al segundo:

$15 = (8 + x) \cdot x$

2. Se quitan paréntesis: $15 = 8x + x^2$.

3. Se pasan todos los términos al mismo miembro y se ordenan:

$15 - 8x - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 - 8x + 15 = 0$.

4. Si en lugar de pasar los términos al primer miembro, se pasan al segundo, la ecuación resultante es: $0 = x^2 + 8x - 15$, ecuación equivalente a la anterior.

En la ecuación $\mathbf{-x^2 - 8x + 15 = 0}$, a = -1; b = -8 y c = 15

En la ecuación $\mathbf{x^2 + 8x - 15 = 0}$, a = 1; b = 8 y c = -15

Los coeficientes son iguales pero de signos contrarios.

Para pasar de una ecuación a otra basta con multiplicar por -1.

3 Expresar en la forma ax2 + bx + c = 0, la siguiente ecuación:

$$\frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(x-1)}{3}=\frac{(x+1)(x+2)}{5}$$

Resolución:

1. Se quitan paréntesis:

$$\frac{3x+3}{2}-\frac{2x-2}{3}=\frac{x^2+2x+x+2}{5}$$

2. Se multiplica toda la ecuación por m.c.m. (2, 3, 5) = **30**

$15(3x + 3) - 10(2x - 2) = 6(x^2 + 2x + x + 2);$

$45x + 45 - 20x + 20 = 6x^2 + 12x + 6x + 12;$

$45x + 45 - 20x + 20 - 6x^2 - 12x - 6x - 12 = 0.$

3. Se reducen términos semejantes: $7x - 6x^2 + 53 = 0$

4. Se ordena la ecuación resultante: $-6x^2 + 7x + 53 = 0.$

Esta ecuación también puede expresarse así: $\mathbf{6x^2 - 7x - 53 = 0}$.

contenido

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2° GRADO INCOMPLETAS

Las ecuaciones de segundo grado incompletas son de tres tipos:

A. $ax^2 = 0$; si $b = 0$ y $c = 0$.
B. $ax^2 + bx = 0$; si $c = 0$.
C. $ax^2 + c = 0$; si $b = 0$.

Ejemplos:

A. $ax^2 = 0$.

Despejando x^2 se tiene: $x^2 = 0 : a \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{0} \Rightarrow x = 0$

Por lo tanto, las ecuaciones de la forma $ax^2 = 0$ tienen como solución única $x=0$.

B. $ax^2 + bx = 0$.

Sacando factor común x en el primer miembro, resulta: $x(ax + b) = 0$.
Para que un producto de dos factores **x** y **(ax + b)**, dé como resultado cero, uno de ellos debe ser cero:

$$x(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

En consecuencia, las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ tienen dos soluciones:

$$\mathbf{x_1 = 0} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{x_2 =} -\frac{b}{a}$$

C. $ax^2 + c = 0$.

Despejando x^2 se tiene: $ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Si el radicando $-\frac{c}{a}$ es negativo, $ax^2 + c = 0$ **NO TIENE SOLUCIÓN**, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo (en el campo de los números reales).

Si el radicando $-\frac{c}{a}$ es positivo, $ax^2 + c = 0$ tiene dos soluciones:

$$\mathbf{x_1} = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2} = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

EJEMPLOS: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

1)

a) $2x^2 - 18 = 0$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 18 : 2$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$ $\quad x_1 = 3$

$x = \pm 3$ $\quad x_2 = -3$

b) $3x^2 + 12 = 0$

$3x^2 = -12$

$x^2 = -12 : 3$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4}$ $\quad x_1 = 2i$

$x = \pm 2i$ $\quad x_2 = -2i$

2)

a) $3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$

si $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

si $3x - 5 = 0$

$3x = 5$

$x = \frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}$

b) $5x^2 + 15x = 0$

$x(5x + 15) = 0$

si $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

si $5x + 15 = 0$

$5x = -15$

$x = -15 : 5$

$x = -3 \Rightarrow x_2 = -3$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2° GRADO COMPLETAS

Una ecuación de segundo grado completa puede expresarse en la forma **$ax^2 + bx + c = 0$**, donde a, b y c son números distintos de cero.

Para resolver una ecuación de segundo grado se aplica la **fórmula de Bascara:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Esta fórmula se utiliza también para resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas, sin más que poner un cero en el coeficiente correspondiente.

De esta fórmula se deduce que una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, llamadas x_1 y x_2, dependiendo del signo + ó - que se toma delante de la raíz:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Discusión de las soluciones de una ecuación de segundo grado:

A la expresión que aparece, en las fórmulas anteriores, bajo el signo de raíz, **$b^2 - 4ac$**, se le denomina **discriminante**, y se representa por la letra griega delta mayúscula, **$\Delta = b^2 - 4ac$**.

Dependiendo del valor del discriminante, una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución.

Se distinguen tres casos:

A. $\Delta > 0$. Si el discriminante es positivo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas

B. $\Delta = 0$. Si el discriminante es cero, las dos soluciones anteriores coinciden, teniendo la ecuación una única solución, y en este caso es una solución doble. (Se dice que tiene raíz doble, $x_1 = x_2$).

C. $\Delta < 0$. Si el discriminante es negativo, la ecuación de segundo grado no tiene solución real, ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe. (Tiene solución compleja, siendo x_1 y x_2 complejos conjugados).

EJEMPLOS: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Resolver la ecuación x2 - 5x + 6 = 0.

<u>Resolución:</u>

1. a = 1; b = -5; c = 6.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

La ecuación tiene dos soluciones: $\mathbf{x_1 = 3}$ y $\mathbf{x_2 = 2}$.

2. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

<u>Resolución:</u>

1. En esta ecuación a = 1; b = 1; c = 1

2. Aplicando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

3. La ecuación no tiene solución real, ya que el discriminante es negativo.

3. Resolver la ecuación 10x^2 + 5(4x + 2) = 0.

Resolución:

1. Antes de aplicar la fórmula, hay que expresar esta ecuación en la forma **ax^2 + bx + c = 0**.

10x^2 + 20x + 10 = 0. Esta ecuación puede simplificarse dividiendo entre 10:

x2 + 2x + 1 = 0

2. a = 1, b = 2, c = 1

3. Se aplica la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por ser el discriminante cero, la ecuación tiene una solución doble:

$x_1 = x_2 = -1$

Si resuelvo **10x^2 + 20x + 10 = 0** obtengo las mismas raíces. Resuélvalo aplicando Bascara para comprobarlo.

Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado

Dada la ecuación de segundo grado $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, y $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ sus soluciones, se cumple:

1. La suma de las dos soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado, $x_1 + x_2$, es

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. El producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado, $x_1 \bullet x_2$, es

$$x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$$

EJEMPLOS: SUMA Y PRODUCTO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1. Determinar, sin resolver las ecuaciones, el valor de la suma y del producto de sus soluciones:

a) $2x^2 + 7x – 15 = 0$ b) $\frac{20}{x} = 9 – x$ c) $3x^2 -+ 6x + 3 = 0$

Resolución:

a) $2x^2 + 7x – 15 = 0$; a = 2; b = 7; c = – 15

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{2} = -3{,}5$

$x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{2} = -7{,}5$

b) $\frac{20}{x} = 9 – x$ Hay que llevarlo a la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Pasamos la x multiplicando $20 = (9 - x)\bullet x$

$20 = 9x - x^2$

Reacomodamos $x^2 - 9x - 20 = 0$ a = 1; b = – 9; c = – 20.

$x_1 + x_2$ = $-\frac{b}{a} = -\frac{-9}{1} = 9$

$x_1 \bullet x_2$ = $\frac{c}{a} = \frac{-20}{1} = -20$

c) $3x^2 + 6x + 3 = 0$; en esta ecuación a = 3; b = 6; c = 3.

$x_1 + x_2$ = $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{3} = -2$

$x_1 \bullet x_2$ = $\frac{c}{a} = \frac{3}{3} = 1$

Determinación de una ecuación de segundo grado a partir de la suma y producto de sus soluciones

Conociendo la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado, se puede determinar la ecuación correspondiente.

Sea S la suma de las dos raíces o soluciones de la ecuación:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow a \cdot S = -b \Rightarrow -a \cdot S = b$$

Sea P el producto de las dos raíces o soluciones de la ecuación:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot P = c \Rightarrow a \cdot P = c$$

La ecuación de segundo grado se escribe como $ax^2 + bx + c = 0$.

Sustituyendo b y c por su valor: $ax^2 - a\,\mathbf{S}\,x + a\,\mathbf{P} = 0$

Dividiendo toda la ecuación por a: $\mathbf{x^2 - S\,x + P = 0}$

Conociendo la suma S, y el producto, P, de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación se puede escribir como:

$$\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$$

EJEMPLOS: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Determinar la ecuación de segundo grado cuya suma de soluciones es 5 y cuyo producto es 6.

Resolución:

1. **S = 5; P = 6**

La ecuación es $x^2 - Sx + P = 0$. Sustituyendo S y P por sus valores, se obtiene:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2. Para comprobar que la suma y el producto de las soluciones de la ecuación son 5 y 6 respectivamente, basta con resolver la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$S = x_1 + x_2 = 3 + 2 = 5$

$P = x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 2 = 6$

Luego, efectivamente la ecuación es $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2. Determinar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Resolución:

1. $S = x_1 + x_2 = -2 + 3 = 1$

$P = x_1 \cdot x_2 = -2 \cdot 3 = -6$

2. Sustituyendo los valores de S y P en la ecuación $x^2 - Sx + P = 0$ se obtiene la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$.

3. Para comprobarlo basta con resolver la ecuación y observar que sus raíces son –2 y 3.

<u>Otro procedimiento para reconstruir una ecuación de segundo grado a partir de sus raíces es:</u>

$$\mathbf{(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0}$$

Ejemplos:

Sean x_1 y x_2 las raíces de una ecuación cuadrática, reconstruirla.

1) Tomemos el ejemplo 2 dado anteriormente donde $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$.

$(x - (-2)) \cdot (x - 3) = 0$
$(x + 2) \cdot (x - 3) = 0$
$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$
$\mathbf{x^2 - x - 6 = 0}$

2) $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$.

$(x - 4) \cdot (x - 2) = 0$
$x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$
$\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0}$

3) $x_1 = \frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

$(x - \frac{5}{2}) \cdot (x - \frac{3}{2}) = 0$

$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}x + \frac{15}{4} = 0$

$\mathbf{x^2 - 4x + \frac{15}{4} = 0}$

$\frac{4x^2 - 16x + 15}{4} = 0$

Paso 4 (denominador) multiplicando al 2º miembro (0 · 4 = 0)

Luego resulta:

$4x^2 - 16x + 15 = 0$

<u>EJERCICIOS:</u>

Reconstruir en cada caso la ecuación cuadrática, conociendo sus raices.

1) $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$
2) $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$
3) $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$
4) $x_1 = -1$ y $x_2 = -3$
5) $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{1}{4}$
6) $x_1 = 2 + 2i$ y $x_2 = 2 - 2i$
7) $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ y $x_2 = 3 - \sqrt{2}$
8) $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$

RESPUESTAS:

1) $x^2 - 8x + 15 = 0$
2) $x^2 - 2x - 8 = 0$
3) $9x^2 - 18x + 8 = 0$
4) $x^2 + 4x + 3 = 0$
5) $4x^2 - 11x - 3 = 0$
6) $x^2 - 4x + 8 = 0$

7) $x^2 - 6x + 7 = 0$

8) $6x^2 - 11x + 3 = 0$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS: PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN MEDIANTE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1. Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 168.

Resolución:

1. Cualquier número par puede expresarse en la forma 2x.
2. Sea pues 2x un número par. El par consecutivo de 2x es 2x + 2.
3. El producto de los dos números es 168: 2x(2x + 2) = 168. Se plantea así una ecuación de segundo grado que hay que resolver.
4. $2x(2x + 2) = 168 \rightarrow 4x^2 + 4x - 168 = 0$.
5. Dividiendo toda la ecuación entre 4, resulta $x^2 + x - 42 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 13}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{-1-13}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

6. Si x = 6, 2x = 2·6 = **12** ; 2x + 2 = 12 + 2 = **14**

Una solución es **12** y **14**.

7. Si x = -7, 2x = 2·(-7) = **-14** ; 2x + 2 = -14 + 2 = **-12**

Dos números pares consecutivos cuyo producto es 168 son -14 y -12.

El problema tiene dos soluciones: 12 y 14; -12 y -14.

2. Calcular dos números cuya suma sea 39 y cuyo producto sea 380.

3. Se han comprado gomas de borrar por un total de $60. Si se hubieran comprado tres gomas más, el comerciante habría hecho un descuento de $1 en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántas gomas se compraron?

Resolución:

1. Sea x el número de gomas que se han comprado por $60. El precio de cada goma se obtendrá dividiendo el precio total entre el número de gomas.

Precio de cada goma = $\frac{60}{x}$

Si se compran tres gomas más, su precio será $\frac{60}{3+x}$ pero como su precio sería de $1 pesos menos cada una, entonces se obtendrá:

$$\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{3+x}$$

2. Resolviendo esta ecuación:

$$\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{3+x} \Rightarrow \frac{60-x}{x} = \frac{60}{3+x} \Rightarrow (60-x)\cdot(3+x) = 60\cdot x \Rightarrow$$
$$180 + 60x - 3x - x^2 = 60\cdot x \Rightarrow x^2 + 3\cdot x - 180 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-180)}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+720}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2} =$$
$$= \frac{-3 \pm 27}{2}$$
$$x_1 = \frac{-3+27}{2} = \frac{24}{2} = 12 \qquad x_2 = \frac{-3-27}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

El número de gomas que se compraron fue 12, ya que una solución negativa para un número de objetos no tiene sentido. Cada goma costo 60/12 = $5.

Si se hubieran comprado 3 gomas más, es decir, 15 gomas, el precio hubiese sido de 60/15 = $4 cada una.

4. Dos obreros tardan 12 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían en hacerlo separadamente, si uno tarda 5 horas más que el otro?

Resolución:

1. Sea x el número de horas que emplea el primer obrero en realizar el trabajo.

En 1h hará $\frac{1}{x}$ del total del trabajo.

El segundo empleado utilizará (5 + x) hs. En 1h hará $\frac{1}{5+x}$ del total del trabajo

Entre los dos tardan 12hs, luego en 1h harán $\frac{1}{12}$ del total del trabajo.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{5+x}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{5+x+x}{x\cdot(5+x)}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{5+2x}{5x+x^2}=\frac{1}{12}$$

Por lo tanto $(5+2x)\cdot 12 = 1\cdot(5x+x^2) \Rightarrow 60+24x=5x+x^2$

$$5x+x^2-24x-60=0$$

$$x^2-19x-60=0$$

Resuelva la ecuación.

5. Determinar el valor de m para que la ecuación $2x^2$ – 4x + m = 0 tenga una raíz doble. (resuelve utilizando el discriminante) Rta: m = 2

6. Si se aumenta en 4cm el lado de un cuadrado, su área aumenta en $104cm^2$. Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.
Rta: A = $121cm^2$ y P = 44cm

EJERCICIOS UNIDAD 3:

1) Resolver las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $2x^2 - 50 = 0$

b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 + 36 = 0$

d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8} = 0$

e) $2x^2 - 3x = 0$

f) $-3x^2 + 27x = 0$

g) $\frac{2}{3}x^2 - 3x = 0$

h) $3x^2 + 81x = 0$

2) Resolver las siguientes ecuaciones completas, expresándolas previamente cuando corresponda en la forma $ax^2 + bx + c = 0$

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $-2x^2 + 4x + 16 = 0$

e) $2x^2 = 10x - 12$

f) $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$

g) $(x + 1)(3x + 3) = 2(x^2 + 3x + 1)$

h) $(x + 5)\cdot 2x - 3x + 4 = 3(x^2 - 3) - 5$

i) $(2x - 1)^2 - 9 = 0$

j) $(x - 3)^2 - 1 = 0$

k) $x(x+5) + \frac{5}{2} = 2x$

3) Resolver los siguientes problemas.

a) El cuadrado de un número entero es igual al siguiente (al consecutivo) multiplicado por –4.

b) La suma de los cuadrados de tres números enteros consecutivos es 50 ¿cuáles son dichos números?

c) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado mas su triplo es igual a 40?

d) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

e) ¿Por qué numero natural hay que dividir a 156, para que el cociente, el divisor y el resto sean iguales.(recordar $D = c \cdot d + r$).

f) En un triangulo rectángulo sus catetos son **x + 2** y **4x** respectivamente y la hipotenusa **4x + 1**. Calcular el valor de **x** y la longitud de cada uno de los lados, sabiendo que estos están expresados en cm. (Pitágoras). Calcular el área y el perímetro.

g) En un triángulo isósceles cuyo perímetro es 20cm, $\overline{ab} = \overline{ac}$ siendo la base $\overline{bc}$. Calcular el valor de sus lados expresados en cm, estando los mismos dados por las siguientes formulas:

$\overline{ab} = \mathbf{15 - 3x}$; $\overline{ac} = \mathbf{12 - 2x}$ y $\overline{bc} = x^2 - 1$

h) La edad de Jorge elevada al cuadrado es igual a 5 veces la edad que tendrá dentro de 10 años. ¿Qué edad tiene Jorge?

RESPUESTAS EJERCICIOS UNIDAD Nº 3

1)

a) $x_1 = 5$ $x_2 = –5$

b) $x_1 = 3$ $x_2 = -3$

c) $x_1 = 6i$ $x_2 = -6i$

d) $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = -\frac{3}{2}$

e) $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{3}{2}$

f) $x_1 = 0$ $x_2 = 9$

g) $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{9}{2}$

h) $x_1 = 0$ $x_2 = -27$

2)

a) $x_1 = 3$ $x_2 = 2$

b) $x_1 = 2$ $x_2 = -4$

c) $x_1 = x_2 = 3$

d) $x_1 = 4$ $x_2 = -2$

e) $x_1 = 3$ $x_2 = 2$

f) $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = \frac{1}{2}$

g) $x_1 = i$ $x_2 = -i$

h) $x_1 = 9$ $x_2 = -2$

i) $x_1 = 2$ $x_2 = -1$

j) $x_1 = 4$ $x_2 = 2$

k) $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

3)

a) $x = -2$

b) 3 ; 4 y 5 o –5 ; –4 y –3

c) 5 y –8

d) 15 y 17

e) por 12

f) $x = 3$ o $x = 1$.

Si $x = 3$; Hip = 13cm ; Cat = 12cm y Cat = 5cm

P = 30cm y Área = $30cm^2$

Si x = 1 ; Hip = 5cm ; Cat = 4cm y Cat = 3cm

P = 12cm y Área = $6cm^2$

g) $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

Si x = 3 ; $\overline{ab}$ = 6cm ; $\overline{ac}$ = 6cm y $\overline{bc}$ = 8cm

Si x = 2 ; $\overline{ab}$ = 9 cm ; $\overline{ac}$ = 8 cm y $\overline{bc}$ = 3 cm

Por lo tanto x = 2 no es solución del problema pues $\overline{ab} \neq \overline{ac}$ (aunque sea P = 20cm), entonces el triangulo no sería isósceles.

h) 10 años

_UNIDAD_4: POLIEDROS

CUERPOS GEOMETRICOS

1.1.1 Poliedros: Aquellos cuerpos geométricos totalmente limitados por polígonos, como por ejemplo, el prisma, la pirámide; etc.

1.1.2 Cuerpos redondos: Aquellos cuerpos geométricos engendrados por la rotación de una figura plana alrededor de su eje, como la esfera, el cilindro, etc.

CLASIFICACION DE LOS POLIEDROS

Algunos poliedros reciben nombres especiales en función del número de caras que poseen.

Así, se llama **tetraedro** a todo poliedro de cuatro caras; **pentaedro**, al poliedro de cinco caras; **hexaedro**, al poliedro de seis caras; **heptaedro** al de siete caras; **octaedro**, al de ocho, etc.

Conviene no confundir los poliedros (cuerpos geométricos cerrados) de los ángulos poliedros correspondientes, a pesar del gran parecido en las denominaciones de unos y otros, que únicamente se diferencian en la palabra “ángulo” que figura antepuesta cuando se trata de un ángulo poliedro y no figura cuando se trata del poliedro correspondiente.

En el caso del ángulo triedro resulta indiferente la denominación “ángulo triedro” o la denominación “triedro”, ya que por no existir el poliedro de tres lados no es posible que se dé la confusión anterior.

Se entiende por desarrollo de poliedro a la figura obtenida cuando se representan todas las caras del poliedro sobre un plano, de manera que cada cara del poliedro aparezca. Unida a sus adyacentes según la misma arista con la que lo estaba el poliedro.

Se dice que un poliedro es convexo cuando cualquier recta puede cortar su superficie en dos puntos, lo que equivale a decir que el poliedro no tiene ningún diedro entrante. En el caso contrario, es decir, cuando alguna recta corta la superficie del poliedro en más de dos puntos, se dice que el poliedro es **cóncavo**.

En este caso, como se comprende fácilmente, el poliedro tiene algún ángulo diedro entrante.

Atendiendo a la regularidad de sus elementos se puede establecer otra clasificación de los poliedros en:

1) Poliedros Regulares. Cuando todas sus caras son polígonos regulares entre sí y todos sus ángulos diedros y poliedros son también iguales. Como se verá más tarde, existen únicamente cinco poliedros regulares.

2) Poliedros Irregulares. Cuando no son regulares, por no cumplirse algunas o todas las condiciones precisas para ello.

Dentro de los poliedros existen tres grupos importantes: los prismas, los paralelepípedos y las pirámides.

ELEMENTOS DE LOS POLIEDROS

Arista de un poliedro.

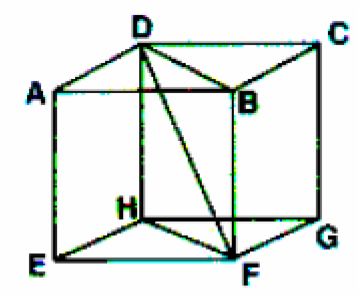
Son los lados de las caras del poliedro (AB, CG, etc).

Vértice de un poliedro.

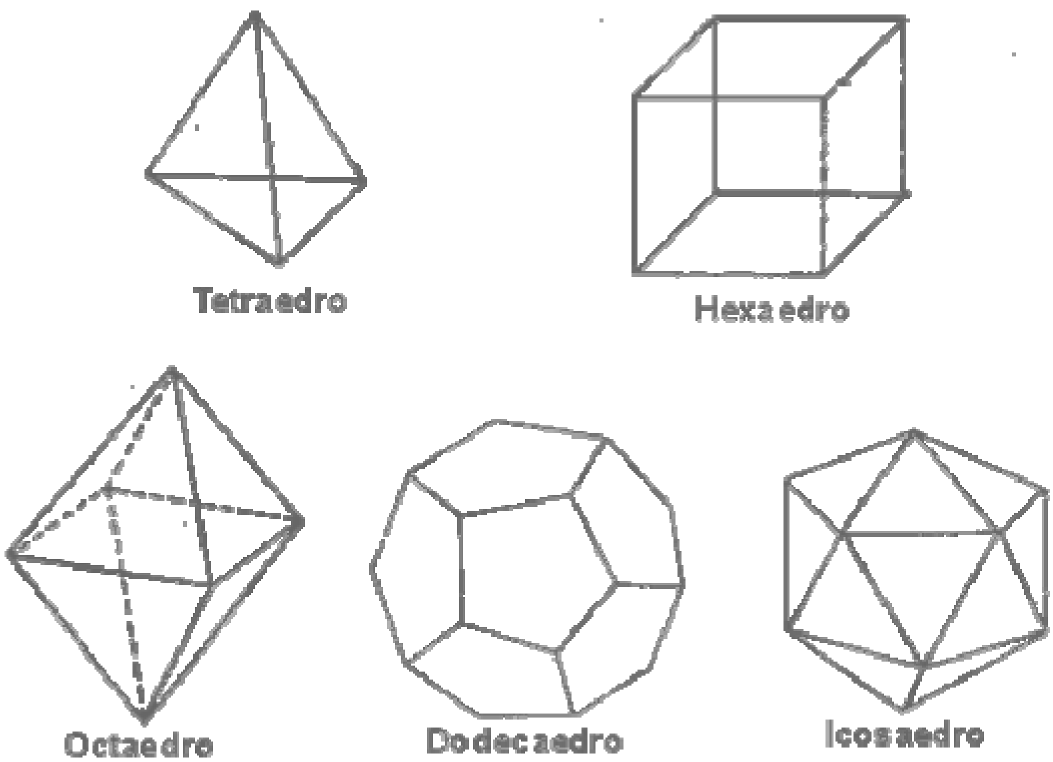
Es la intersección de tres o más de sus aristas (A, B, D, etc).

Diagonal de un poliedro.

Son los segmentos que unen dos vértices no pertenecientes a la misma cara (DF, CE, AG, HB).



Cinco poliedros regulares y sus dibujos correspondientes.



PRISMAS

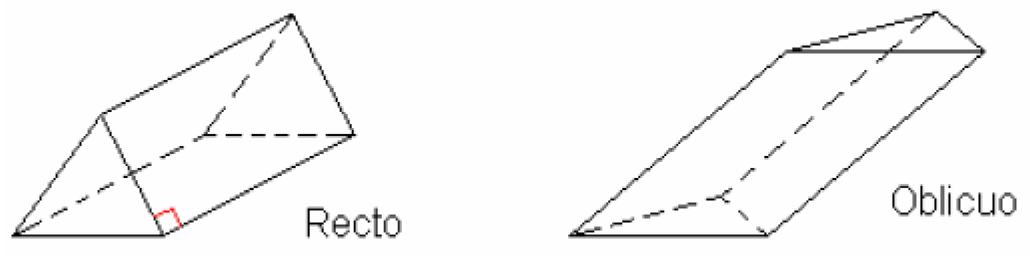
Se denominan **prismas** a aquellos poliedros limitados por dos polígonos cualesquiera iguales y de dos lados paralelos llamados "bases" y por tantos paralelogramos como lados tienen las bases.

Dichos paralelogramos reciben el nombre de caras **laterales** del prisma. La distancia entre las dos bases se llama altura del prisma. Los lados de las bases constituyen las aristas básicas y los lados de las caras laterales, las aristas laterales, iguales y paralelas entre sí.

Sección recta de un prisma es el polígono obtenido al cortar dicho prisma por un plano perpendicular a las aristas laterales.

Tronco de prisma es la porción de prisma comprendida entre una de las bases y una sección recta del prisma no paralela a las bases.

Dibujo de un prisma recto y uno oblicuo.



Área lateral de un prisma

El área lateral se obtiene, cuando se trata de un prisma recto, multiplicando el perímetro de la base por la altura del prisma.

Área lateral del prisma recto = p • a

Si se trata de un prisma oblicuo, el área lateral del prisma se obtiene multiplicando el perímetro de la sección recta por la arista lateral del prisma.

Área lateral del prisma oblicuo = pr • a

Área total del prisma

El área total de un prisma se obtiene sumando al área lateral y el área de las dos bases

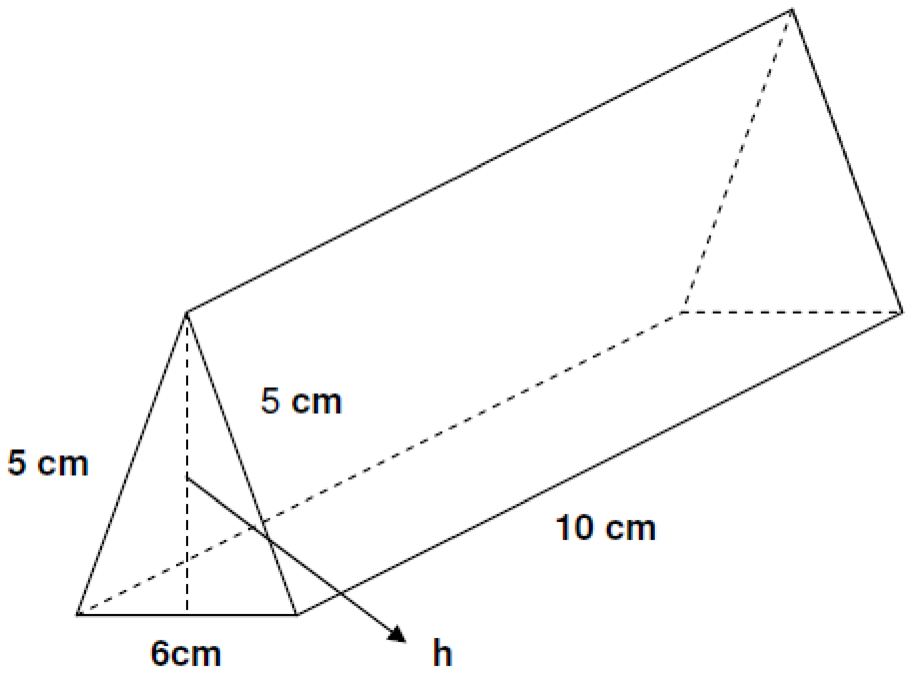
Área total del prisma = p • a + 2B

p: perímetro de la base o bien perímetro de la sección recta, cuando se trate de un prisma oblicuo;

a: altura, o bien arista lateral, cuando el prisma sea oblicuo;

B: el área de una de las bases del prisma

Ejemplo:



Para calcular el área total del prisma:

Area lateral = (5cm + 5cm + 6cm)·10cm = **160cm^2**

Área de una base (ver área de triángulos = base • altura/2)

Para calcular la altura se usa Pitágoras (solo para prismas rectos)

$3^2 + h^2 = 5^2$ (3cm es la mitad de la base, o un cateto del triángulo rectángulo imaginariamente formado en la base, dado que en todo triangulo equilátero o isósceles la altura correspondiente a la base, divide a la misma en dos segmentos iguales)

h = $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ (Ésta es la altura del triángulo de la base)

Ahora si, el área de la base es: $\frac{6\text{cm} \cdot 4\text{cm}}{2} = 12\text{cm}^2$

Área total = área lateral + 2 área base = $160\text{cm}^2 + 2 \cdot 12\text{cm}^2 = 184\text{cm}^2$

VOLUMEN DEL PRISMA

$$\mathbf{V = A_b \bullet h}$$

$\mathbf{A_b}$ = Área de la base

h = Altura del prisma

En el ejercicio anterior el volumen del prisma es:

$\mathbf{A_b}$ = $\frac{6\text{cm} \cdot 4\text{cm}}{2} = 12\text{cm}^2$

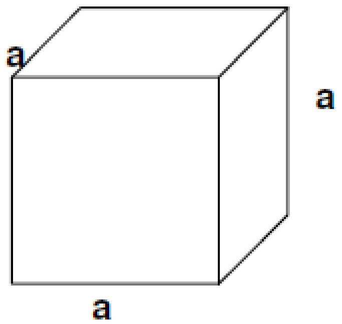
V = $12\text{cm}^2 \cdot 10\text{cm}$ = $\mathbf{120cm^3}$

CUBO

Es un paralelepípedo cuyas seis caras son cuadradas.

Se trata además de un poliedro regular, ya que todos los ángulos poliedros son también iguales.

Es un poliedro regular de 6 caras. Se le denomina Hexaedro (hexa=6, edro=caras)



Área lateral de un cubo y cómo se calcula

• El área lateral de un cubo es igual a la suma de las áreas de las caras laterales de un cubo.
Se obtiene elevando al cuadrado la arista y el producto de eso se multiplica por 4.

a = arista **área lateral = $a^2 \cdot 4$**

Área total de un cubo y cómo se calcula

El área total de un cubo es igual a la suma de las áreas laterales y el área de las regiones básales.
Éstas se obtienen elevando al cuadrado la arista y el producto de eso se multiplica por 2.

A todo eso se le suma el área lateral antes mencionada.

a = arista **área total = $a^2 \cdot 2$ + área lateral.**

También se puede hacer: **A total = $6 \cdot a^2$**

Volumen del cubo y cómo se calcula

El volumen de un cubo es la medida del espacio que ocupa.

Se obtiene elevando al cubo la arista del cubo.

a = arista **$V = a^3$**

Ejemplos:

a) Calcule el área total de un cubo de arista 6cm.

$6cm \cdot 6cm = 36cm^2$ = área de cara.

$36cm \cdot 6$ = **$216cm^2$** = área total del cubo.

b) ¿Cuánto mide la arista de un cubo si su área total es $150cm^2$?

$150cm^2$ **:** $6 = 25cm^2$ = área de cara

Si el área es $=25cm^2 \Rightarrow$ arista = **5 cm**

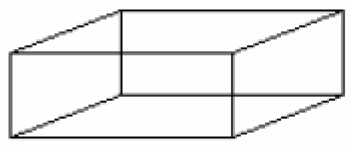
c) Calcule el volumen de un cubo de arista 6cm.

$6cm \cdot 6cm \cdot 6cm$ = **$216cm^2$** = volumen del cubo.

PARALEPÍPEDO

Se denomina paralelepípedos a aquellos prismas cuyas bases son paralelogramos como por ejemplo una caja de fósforos, un dado, etc.

Se comprende fácilmente que un paralelepípedo tiene seis caras (2 correspondientes a las bases que son paralelogramos y 4 a las caras laterales).



Ejemplos:

a) Calcule el área total de un prisma recto cuya base es un cuadrado cuya arista basal mide 8cm y la arista lateral 20cm.

$8cm \cdot 8cm = 64cm^2$ = área cara basal (área de la base)

$64cm^2 \cdot 2 = 128cm^2$ = área basal

$20cm \cdot 8cm = 160cm^2$ = área de una cara lateral

$160cm \cdot 4 = 640cm^2$= área lateral

$128cm^2 + 640cm^2 = \mathbf{768cm^2}$ = área total del prisma

b) Calcule el área total de un paralelepípedo que tiene 16cm de largo, 8cm de ancho y 3cm de alto.

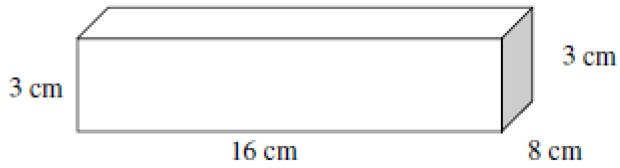
$8cm \cdot 3cm \cdot 2 = 48cm^2$ = parte área lateral

$16cm \cdot 3cm \cdot 2 = 96cm^2$ = parte de área lateral

$16cm \cdot 8cm \cdot 2 = 256cm^2$ = area basal

$48cm^2 + 96cm^2 = 144cm^2$ = área lateral.

$256cm^2 + 144cm^2 = 400cm^2$ = área total del paralelepípedo



CALCULO DEL VOLUMEN DE UN PARALELEPIPEDO

$V = A_b \cdot h$ A_b = área de la base

Ab = largo • ancho h = altura

También se puede calcular de la siguiente manera:

V = L • a • h (largo • ancho • altura)

V = 16cm·8cm·3cm

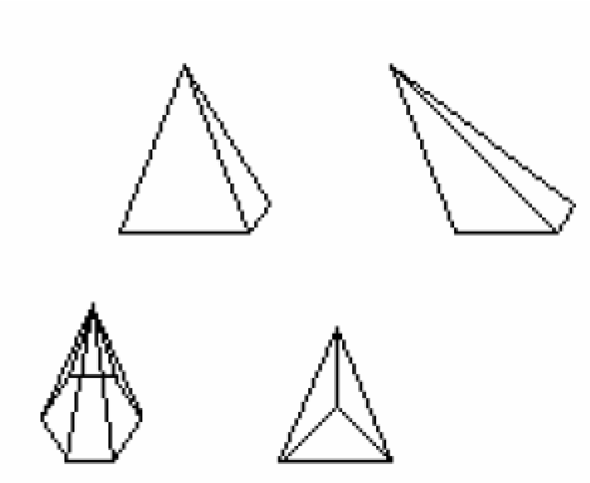
$V = 384cm^3$

contenido

PIRÁMIDE

Se denominan pirámides a aquellos poliedros limitados por un polígono cualquiera llamado “base” y por tantos triángulos como lados tiene la base que concurren a un vértice común, llamado cúspide o vértice de la pirámide.

Las pirámides se pueden clasificar según la región poligonal que tienen por base y según si esta es regular o no regular. Además, toda pirámide puede ser recta u oblicua, según el pie de su altura coincida o no con el centro de su región basal.



Elementos de una pirámide:

Vértice: Es el punto donde convergen todos los triángulos que componen las caras de la pirámide.

Apotema: Es la altura de cada uno de los triángulos que componen las caras de la pirámide.

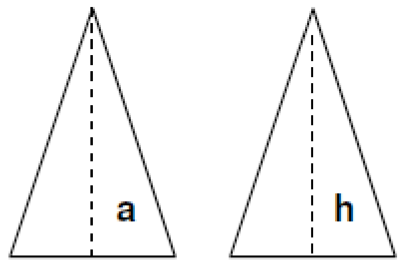
Altura: Es la perpendicular que baja desde la cúspide de la pirámide hasta la base.

Área lateral de una pirámide:

Se denomina área lateral de una pirámide a la suma de las áreas de las caras laterales de la misma

El área lateral de una pirámide regular se obtiene hallando la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema de la pirámide(altura de una cara de la pirámide).

$\mathbf{A_L = P_b \bullet a}$ **o** $\mathbf{A_L = P_b \bullet h}$



También se puede calcular el área lateral (solo si la base es cuadrada), hallando el área de uno de los triángulos que forman las caras de la pirámide y multiplicando dicho valor por el número de caras de la pirámide.

$\mathbf{A_L} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot n$ siendo n el número de caras

Área total de una pirámide:

El área total de una pirámide es igual a la suma del área lateral y el área basal de una pirámide.

$\mathbf{A_t = A_b + A_L}$

Volumen de una pirámide:

Se calcula multiplicando el área de la base por la altura y el resultado de eso se divide en tres.

V (pirámide) = $\frac{1}{3}\mathbf{A_b \bullet h}$ $\mathbf{A_b}$ = área de la base

h = altura.

Ejemplo:

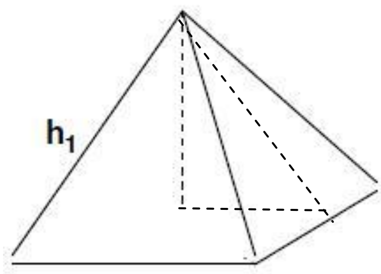
a) Calcula el área lateral de una pirámide de base cuadrada de arista basal 12cm y su altura es de 16cm.(altura del triangulo de la cara de la pirámide)

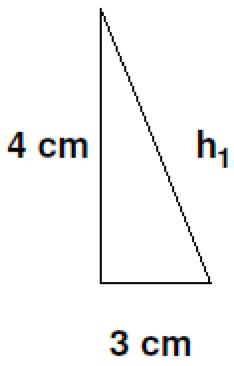
(12cm • 16cm) **:** 2

$=192cm^2$ **:** $2 = 96cm^2$ = área de una cara lateral

$96cm^2 \cdot 4 =$ **$384cm^2$** = área lateral

b) Calcula el área total de una pirámide de base cuadrada si su arista basal es de 6cm y la altura de la pirámide es de 4cm.





Cálculo de la altura de la cara de la pirámide

$h_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

Área de la base = 6cm • 6cm = $36cm^2$

Área de una cara = $\dfrac{6cm \cdot 5cm}{2} = 15cm^2$

Área lateral = $15cm^2 \cdot 4 = 60cm^2$

Área total = $36cm^2 + 60cm^2 = 96\ cm^2$

c) Calcula el volumen de la pirámide anterior.

$A_b = 6cm \cdot 6cm = 36cm^2$ (área de la base)

$V = \frac{1}{3} \cdot 36cm^2 \cdot 4cm$

$V = 48cm^3$

contenido

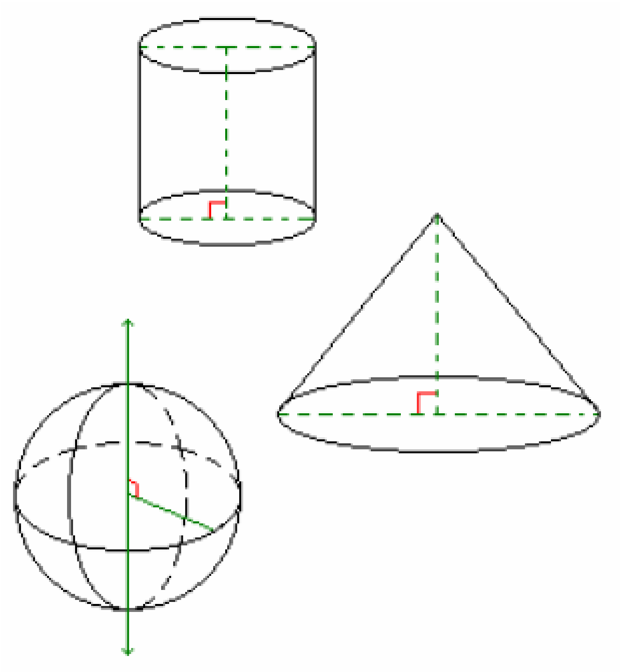
CUERPOS REDONDOS

Los cuerpos redondos son todos aquellos cuerpos o sólidos geométricos formados por regiones curvas o regiones planas y curvas.

Un cuerpo redondo se puede definir también como aquel volumen generado por la revolución de una determinada figura geométrica en torno a un eje imaginario.
De ahí que a esta figura imaginaria del espacio también se la denomina **cuerpo de revolución**.

Los cuerpos redondos son:

• Cilindros
• Conos
• Esferas



CILINDRO

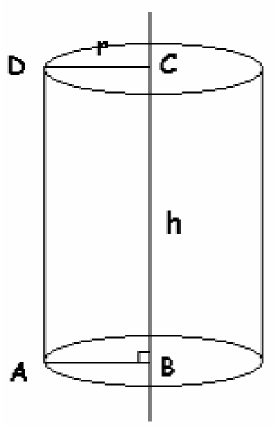
Un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por la revolución de una región rectangular en torno a uno de sus lados o también en torno a uno de sus ejes de simetría.

CD: **radio**

AD: **generatriz**

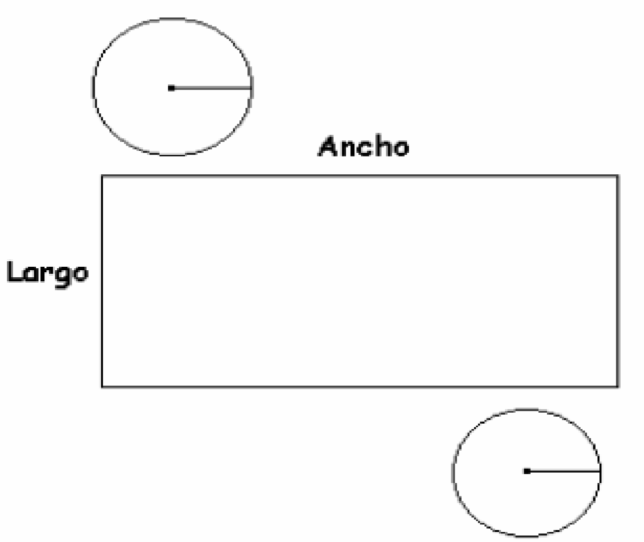
BC: **altura**

BC: **eje**



Área total de un cilindro:

Si “abrimos” un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene la **red del cilindro recto.**



A partir de ella podemos ver que el **área lateral de cilindro** esta determinada por el área de la región rectangular, cuyo largo corresponde a su perímetro basal, es decir a $2\pi r$ cuyo ancho es la medida de la altura del cilindro, o sea h.

$$\textbf{Ál (cilindro)} = 2 \bullet \pi \bullet r \bullet h$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de las dos regiones circulares básales, obtenemos el **área total del cilindro.**

$$\textbf{Át} = \textbf{Ál} + \pi \bullet r^2 + \pi \bullet r^2$$

Entonces,

$$\textbf{Át} = 2\pi \bullet r \bullet h + 2\pi \bullet r^2$$

Por lo tanto:

$$\textbf{Át (cilindro)} = 2\pi r(h + r)$$

Ejemplo:

Un cilindro recto tiene un radio basal de 4cm y su altura mide el doble del diámetro de esa base. ($d = 2 \cdot r$)
Calculemos el área total del cilindro.
Se sabe que: $r = 4cm$ y $h = 2 \bullet (\text{diámetro}) = 2 \bullet 8cm = 16cm$
Át (cilindro) $= 2\pi \cdot 4cm(16cm + 4cm) = 8\pi cm(20cm) = 160\pi cm^2$

<u>Volumen de un cilindro:</u>

Como hemos visto, podemos considerar un cilindro como un prisma que tiene por base una región poligonal de lados infinitamente pequeños.
Por lo tanto, también para un cilindro circular, su volumen es igual al producto del área del círculo basal por su altura.
Es decir: **V (cilindro) =** $\mathbf{A_b \bullet h}$ $\quad A_b$ = área de la base

$$\textbf{V (cilindro)} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo:

El volumen de un cilindro circular cuyo radio basal es de 6cm y cuya altura mide 8cm, es:

V (cilindro) = $\pi(6cm)^2 \cdot 8cm = \pi 36cm^2 \cdot 8cm = 904{,}78\ cm^3$

CONO

Un cono circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por la revolución de una región triangular en torno a uno de sus catetos o en torno a su eje de simetría.

¿Qué es la generatriz de un cono?

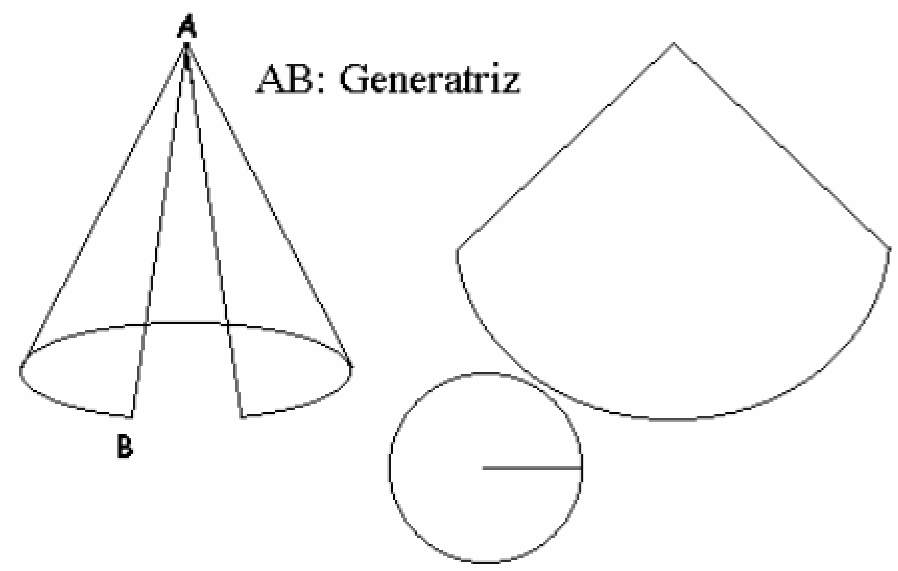
Es una línea lateral imaginaria que es por donde se abre el cono para quedar como el manto.

¿Qué es el manto de un cono?

Es la figura “abierta” que representa el área lateral del cono.

Área lateral de un cono:

Ál (cilindro) = $\pi \cdot r \cdot g$ (g: generatriz)

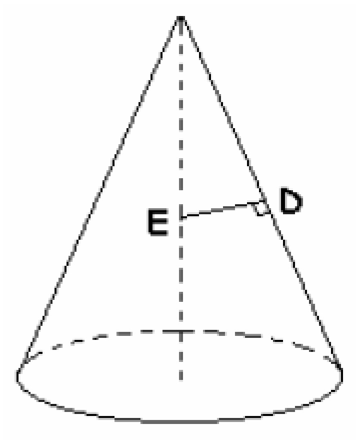


Existe otra relación para calcular el área lateral del cono en función de su altura.

Esto es:

El área lateral de un cono es igual al producto de su altura por el perímetro del circulo cuyo radio es la medida del segmento perpendicular a la generatriz en su punto medio.

$$\text{Ál} = 2\pi \cdot ED \cdot h$$



Área total de un cono:

Si al área lateral del cono le sumamos el área basal, obtenemos el área total: Át (cono) = $\pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$

$$\text{Át (cono)} = \pi \cdot r\,(g + r)$$

Volumen de un cono:

Si consideramos al cono como una pirámide regular cuya base es una región poligonal de lados infinitamente pequeños, entonces se tiene que el volumen de un cono es igual al volumen de una pirámide regular, donde el área basal (Áb) se confunde con el área de una región circular (πr^2).

Sabemos que: **V (pirámide) =** $\frac{1}{3} A_b \cdot h$ $\qquad$ A_b = área de la base

$$\mathbf{A_b = \pi \cdot r^2}$$

Por lo tanto:

V (cono) = $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

$$\textbf{V (cono) = } \frac{1}{3}\boldsymbol{\pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Ejemplo:

a) El área lateral de un cono recto cuya generatriz mide 9cm y cuya altura mide lo mismo que el diámetro basal.

Se sabe que: g = 9cm y 2r = h

$x^2 + (2x)^2 = 81cm^2$ (aplicando Pitágoras)

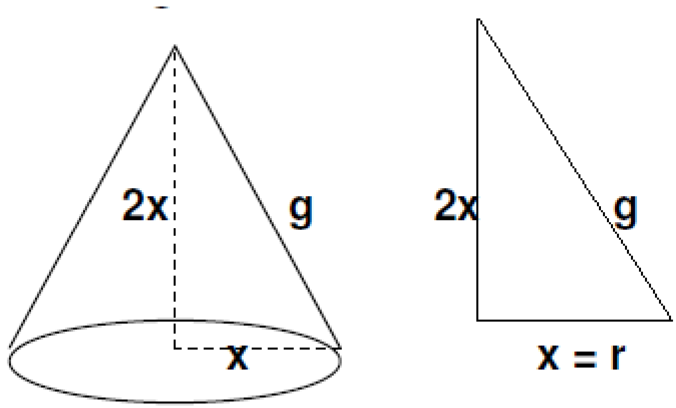
$x^2 + 4x^2 = 81cm^2$

$5x^2 = 81cm^2$

$x^2 = \frac{81cm^2}{5}$

$x = \sqrt{16{,}2cm^2}$

x = 4,02cm



r = 4,02cm

h = 2 • 4,02cm = 8,04cm

Ál (cono) = π • r • g

Ál (cono) = 3,14 • 4,02cm • 9cm

Ál (cono) = $113{,}60cm^2$

b) ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya región basal tiene $25\pi cm^2$ y su altura es de 12cm?

Se sabe que: h = 12cm y que $Á_b = 25\pi cm^2$

$Á_b$ (cono) = $\pi \cdot r^2$

$\pi \cdot r^2 = 25\pi cm^2$

$r^2 = 25cm^2$

$r = \sqrt{25}\ cm^2$

$r = 5\ cm$

$(5cm)^2 + (12cm)^2 = g^2$

$25cm^2 + 144cm^2 = g^2$

$169cm^2 = g^2$

$\sqrt{169cm^2} = g$

$13cm = g$

$Ál\ (cono) = \pi \cdot r \cdot g$

$\pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 5cm \cdot 13cm$

$\pi \cdot r \cdot g = 204{,}10cm^2$

Ál (cono) = 204,20cm²

c) Las papas fritas tienen el mismo precio si se entregan en un envase cónico o en uno rectangular. El cono tiene un radio de 6cm y una altura de 15cm, y las medidas del envase rectangular son 8cm de ancho, 6cm de alto y 9cm de largo. ¿Cuál de los dos envases trae mas papas fritas?

Cono: Se sabe que: r = 6cm y que h = 15cm

$V\ (cono) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{3{,}14 \cdot (6cm)^2 \cdot 15cm}{3}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1696{,}4cm^3}{3} = 565{,}4cm^3$

V (cono) = 565,4cm³

Rectángulo: Se sabe que: L = 9cm, a = 8cm y h = 6cm

$V\ (rectángulo) = L \cdot a \cdot h$

$L \cdot a \cdot h = 9cm \cdot 8cm \cdot 6cm$

$L \cdot a \cdot h = 432cm^3$

V (rectángulo) = 432cm³

Respuesta: El envase que trae más papas fritas es el cónico.

ESFERA

Es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por la revolución de un semicírculo en torno a su diámetro

Área de una esfera:

El área de la superficie esférica se obtiene multiplicando por 4 el área de un círculo máximo de la esfera.

$$\textbf{Superficie esférica} = 4\pi \bullet r^2$$

Volumen de una esfera:

El volumen de la esfera se obtiene hallando los cuatro tercios del producto del número π por el cubo del radio de la esfera.

$$\textbf{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi \bullet r^3$$

Ejemplo:

a) Calcule el área de una esfera de radio 6cm.

A = $\mathbf{4\pi \bullet (6cm)^2}$= 452,38cm^3

b) Calcule el área de una esfera que se encuentra inscrita en un cubo cuya arista es 60cm.(d = 60 cm $\Rightarrow$ r = 60cm **:** 2 = 30cm)

A = $\mathbf{4\pi \bullet r^2}$ = 4 · 3,14 · (30cm)^2

A = 4 · 3,14 · 900cm^2

A = 11304cm^2

actividades

EJERCICIOS UNIDAD Nº 4

1) Calcular El área lateral y el área total de un prisma recto, cuya base es un triangulo isósceles de 5cm de lado y 8cm de base y que tiene una altura de 40cm.

2) Calcular el volumen del prisma del ejercicio anterior.

3) Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cubo de 8cm de arista.

4) Calcular el área total y el volumen de un paralelepípedo de 20cm de largo, 15cm de ancho y 8cm de altura.

5) Calcular el área lateral, el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 16cm de lado y 10cm de apotema, siendo la altura de la pirámide de 6cm.

6) Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro circular recto de 10cm de radio y 30cm de altura.

7) Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cono de 20cm de radio y cuya generatriz mide 30cm (consejo: calcular h por Pitágoras).

8) Una esfera tiene 10cm de radio, calcular el área y el volumen de la misma.

9) Calcular la superficie (área) y el volumen de la tierra, siendo el radio aproximado de la misma de 6370Km.

RESPUESTAS EJERCICIOS UNIDAD Nº 1

1) $AL = 720cm^2$; $At = 740cm^2$

2) $V = 480cm^3$

3) $AL = 256cm^2$; $At = 384cm^2$; $V = 512cm^3$

4) $At = 1160cm^2$; $V = 2400cm^3$

5) $AL = 320cm^2$; $At = 576cm^2$; $V = 512cm^3$

6) $AL = 1884,96cm^2$; $At = 2512cm^2$; $V = 9424,78cm^3$

7) $AL = 1884,96cm^2$; $At = 3141,59cm^2$; $V = 9366,42cm^3$

8) $A = 1256,64cm^2$; $V = 4186,79cm^3$

9) $S = 509904363,8km^2$; $V = 1,083 \cdot 10^{12}km^3 = 1083000000000km^3$

bibliografía

- Tapia 4º, editorial Estrada
- Cálculo I, Larson y Hostetler, Ed McGraw Hill.
- Probabilidad y estadística aplicadas a la Ingeniería, Montgomery, Ed McGraw Hill.
- Enciclopedia temática Océano.
- Apuntes universitarios: Cálculo combinatorio, Números complejos, Geometría en el espacio, cuadernillo de introducción al Análisis matemático, matrices y sistemas de ecuaciones.