Nivel Medio

I-104

Provincia del Neuquén

Patagonia Argentina

COLEGIO NICOLÁS AVELLANEDA NIVEL MEDIO

www.faena.edu.ar info@faena.edu.ar

programa

contenido

actividades

bibliografía

QUINTO BLOQUE MATEMATICA

_PARA TENER EN CUENTA:

Si usted desea imprimir este material en color “Negro” (escala de grises) tan solo tiene que escoger la opción “negro” en las opciones de la impresora.

_UNIDAD_1: FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

- Función exponencial.
- Ecuaciones exponenciales. Resolución.
- Logaritmos.
- Logaritmos decimales y neperianos.
- Cambio de base.
- Función logarítmica. Representación grafica.
- Ecuaciones logarítmicas. Resolución.

_UNIDAD_2: TRIGONOMETRÍA

- Medida de ángulos.
- Funciones trigonométricas.
- Signo de las razones trigonométricas.
- Relaciones entre ángulos y lados.
- Valores de las funciones trigonométricas de ángulos particulares.
- Representación grafica de las funciones trigonométricas.
- Funciones inversas.
- Teoremas fundamentales.
- Resolución de triángulos

ACERCA DE ESTE MODULO

¿QUÉ CONTIENE Y CÓMO SE USA?

Este módulo está compuesto por dos unidades en las que se despliegan los contenidos correspondientes al quinto bloque de Matemática. Para cada unidad encontrará actividades acordes que le permitirán poner en práctica los conceptos estudiados y poner a prueba su aprendizaje, lo cual deja abierta la posibilidad de volver atrás y revisar lo ya aprendido si lo considera necesario.

Al finalizar el módulo encontrará la bibliografía de referencia que le permitirá profundizar en los contenidos trabajados, y responder a las dudas que le suscite la lectura de este material.

La estructura de este módulo de estudio permite visualizar con claridad los conceptos, que se encuentran apartados entre sí, lo cual facilita la elaboración y comprensión de los mismos. Encontrará cuadros, esquemas y palabras resaltadas que colaborarán para una mejor comprensión de los contenidos.

Al final del módulo encontrará actividades de tipo evaluativas que podrán ser tomadas para evaluaciones futuras y que usted puede usar a modo de simulacro, para poner a prueba los conocimientos adquiridos a lo largo de toda la unidad. Se recomienda cumplir con este trabajo de cierre ya que le permitirá relacionar unos contenidos con otros y darle una conclusión al trabajo realizado a lo largo de todo el módulo.

Todo lo que usted aporte a lo propuesto por este material, profundizará su aprendizaje y su dominio sobre la materia. Es un trabajo que depende de cada uno y que se trata de una inversión. “Quien más lee más sabe”, una afirmación casi obvia pero poco practicada. Es de este modo cómo uno logra diferenciarse, crecer y desarrollar un proceso propio.

DESARROLLO DE CONTENIDOS DEL BLOQUE 5. QUINTO AÑO

A modo de introducción:

En este módulo se desarrollan los contenidos del quinto bloque de matemática. Se presenta la trigonometría, funciones logaritmo, exponencial y ecuaciones logarítmicas y exponencial. Los contenidos se abordarán desde lo más general a lo particular. Se presenta la teoría del tema presentado de la forma más clara posible, luego se dan ejemplos resueltos por el profesor y por último se dan ejercicios con lo que el alumno debe aplicar lo aprendido.

En la primera unidad se verán las funciones exponenciales y logarítmicas. Se empieza a trabajar con el número irracional e.

Se las graficará. Se le enseña al alumno un nuevo concepto matemático: el logaritmo. Seguido a ello se abordan las funciones logarítmicas. Se muestra la relación que hay entre ecuaciones exponenciales y logarítmicas, y se aprende a transformar una en otra.

En la segunda unidad se desarrolla el tema de la trigonometría. Se ven los conceptos de razones trigonométricas y su utilidad en la resolución de triángulos y problemas de la vida diaria. Se presentan los teoremas del seno, coseno y el de Pitágoras.

Los contenidos abordados en este módulo constituyen un conjunto básico de saberes que cualquier individuo debe manejar para un buen desarrollo en todo lo que hace a la vida, tanto en el campo personal como laboral.

Les dedicamos un buen y entusiasta recorrido de la materia.

OBJETIVOS PARTICULARES DE CADA UNIDAD

OBJETIVOS DE LA UNIDAD 1

Al finalizar esta Unidad se deberá lograr:

- Que el alumno reconozca las funciones exponenciales.
- Que sepa graficarlas y manejar sus propiedades.
- Que sepa resolver ecuaciones exponenciales.
- Que sepa el concepto de logaritmo y que sepa aplicarlo.
- Que resuelva ecuaciones logarítmicas.
- Que reconozca las funciones logarítmicas y que sepa graficarlas.
- Que sepa relacionar ecuaciones exponenciales con ecuaciones logarítmicas

OBJETIVOS DE LA UNIDAD 2

Al finalizar esta Unidad se deberá lograr:

- Que el alumno sepa reconocer y trabajar con las diferentes funciones trigonométricas.
- Que conozca los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.
- Que sepa aplicar en diferentes situaciones problemáticas el teorema del seno, del coseno y el de Pitágoras.
- Que resuelva correctamente en triángulos rectángulos, las diferentes incógnitas que se le puede plantear en distintos ejercicios.

_UNIDAD_1: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Se llama **función exponencial** de base a, siendo **a** un número real positivo y distinto de 1, a la función

$$\boldsymbol{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+} \,/\, \mathbf{x} \rightarrow f(x) = a^{x}$$

Esta función se escribe también como f(x) = $\exp_a$ x y se lee "exponencial en base a de x".

Antes de dar un ejemplo de función exponencial, conviene recordar algunas propiedades de las potencias:

1) $a^0 = 1$

2) $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$

3) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

4) $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^{m}}$

<u>Ejemplos de funciones exponenciales</u>

1. La función y = 2^x es una función exponencial de base 2. Algunos de los valores que toma x en esta función, $\boldsymbol{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$ que facilitan graficar la función son 0 , 1 , 2 , -1 y -2

<u>Propiedades de la función exponencial y = a^x</u>

1. Para x = 0, la función toma el valor 1: $f(0) = a^0 = 1$

2. Para x = 1, la función toma el valor a: $f(1) = a^1 = a$

3. La función es positiva para cualquier valor de x: $f(x)>0$.

Esto es debido a que la base de la potencia, a, es positiva, y cualquier potencia de base positiva da como resultado un número positivo.

4. Si la base de la potencia es mayor que 1, a>1, la función es creciente.

5. Si la base de la potencia es menor que 1, a<1, la función es decreciente.

<u>Representación gráfica de la función exponencial</u>

Observando las propiedades antes descritas para una función exponencial, se han de distinguir dos casos para hacer la representación de una función $y = a^x$:

A) a > 1

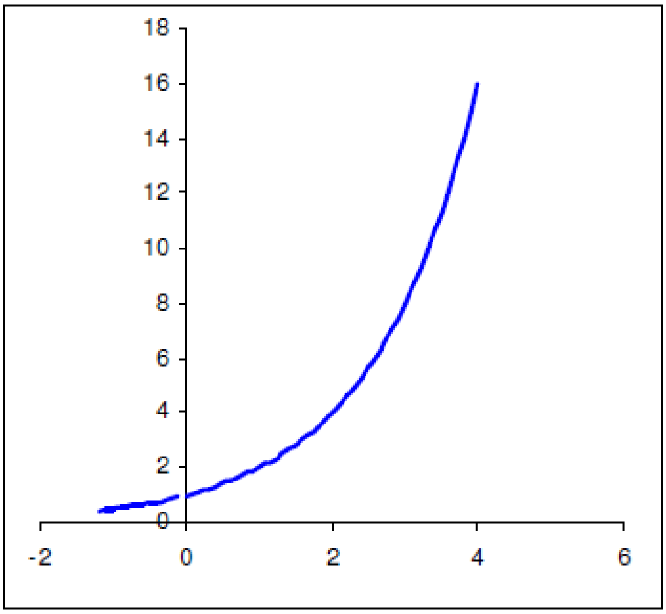
En este caso, para x = 0, $y = a^0 = 1$

para x = 1, $y = a^1 = a$

para cualquier x, la función es creciente y siempre positiva.

Como caso particular se representa la función $y = 2^x$.

X	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$



B) a < 1

Para x = 0, $y = a^0 = 1$

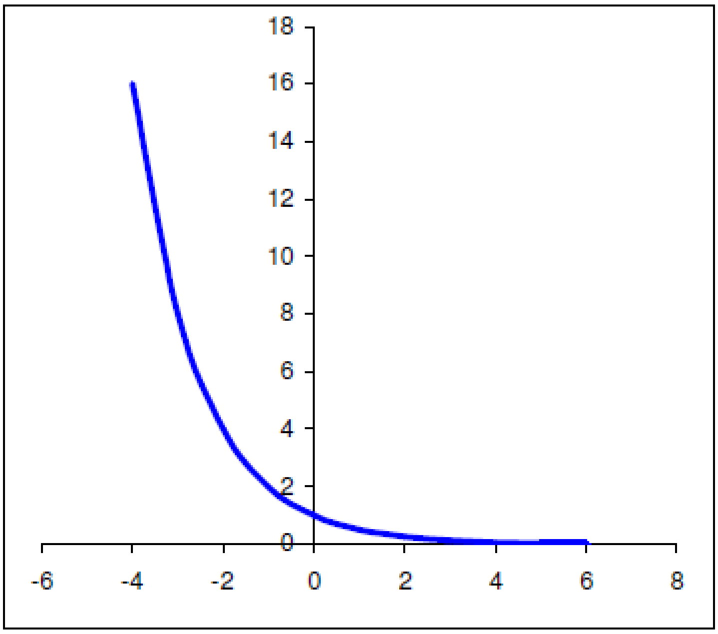
para x = 1, y = a^1 = a

Para cualquier x la función es decreciente y siempre positiva (Hacer la gráfica).

Ejemplo:

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4



En estas dos graficas el eje de las **x** (que es cuando y=0) se denomina **asíntota**, la curva se acerca indefinidamente al eje **x** pero nunca lo corta porque y es siempre positiva.

Eje de asíntotas: y = 0

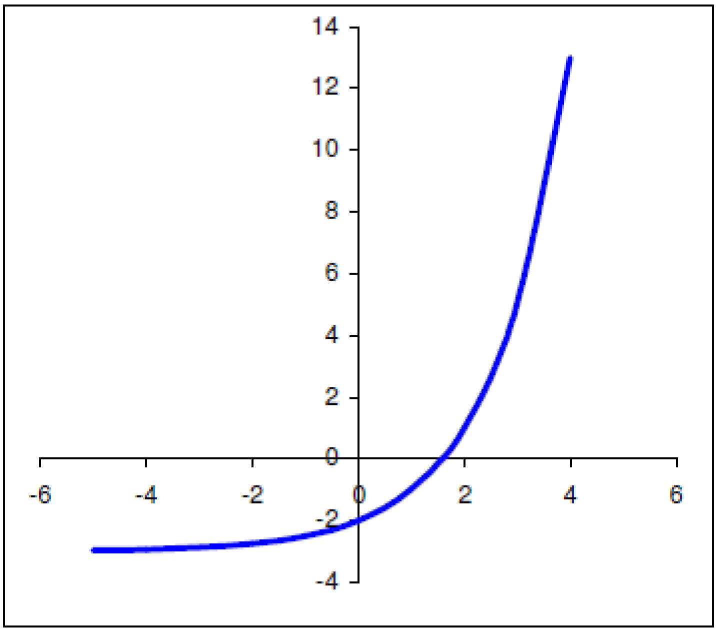
<u>DESPLAZAMIENTO DEL EJE DE LAS ASÍNTOTAS</u>

En la función y = a^x ± b, hay un desplazamiento del eje de las asíntotas de **b** unidades hacia arriba si b es positiva o de b unidades hacia abajo si b es negativa.

Ejemplo:

$y = 2^x - 3$

x	y
0	-2
1	-1
2	1
-1	-2,5
-2	-2,75
-3	-2,875



Eje de asíntotas: $y = -3$

En la función $\mathbf{y = 2^{x \pm n}}$ el exponente $\mathbf{x \pm n}$ debe tomar sucesivamente los valores 0, 1, 2, -1 y -2.

Ejemplo:

$y = 2^{x+2}$

Debo hacer

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 = -1$

$x + 2 = 2 \Rightarrow x = 2 - 2 = 0$

$x + 2 = -1 \Rightarrow x = -1 - 2 = -3$

$x + 2 = -2 \Rightarrow x = -2 - 2 = -4$

x	y
-2	1
-1	2
0	4
-3	½
-4	1/4

Grafique la función

Ejercicios:

Graficar las siguientes funciones exponenciales:

1) $y = 3^{x+1}$

2) $y = 2^{x-2} - 1$

3) $y = 2^{x+1} + 2$

4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2$

5) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 2$

6) $y = 2^{x-3} + 1$

contenido

LOGARITMOS

Definición: Se define en base **b**, de un número **a** (llamado argumento), a un número **n**, si y solo si la base **b** elevada a la **n** me da por resultado **a**.

En símbolos:

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\text{con } a \in R^+,\ b \in R^+,\ n \in R$$

$\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

Algunos logaritmos particulares

1) El logaritmo en cualquier base de 1 es igual a 0

$$\log_b 1 = 0$$

$\log_2 1 = 0$ porque $2^0 = 1$

2) El logaritmo de la base, es igual a 1

$$\log_b b = 1$$

$\log_5 5 = 1$ porque $5^1 = 5$

3) Si la base es entera y el argumento una fracción que es potencia de la base el resultado es negativo.

$$\log_b \left(\frac{1}{b^n}\right) = -n$$

$\log_3 \frac{1}{9}$ = −2 porque $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

4) Si la base es una fracción y el argumento un número entero potencia de la base el resultado es negativo.

$$\mathbf{\log_{\frac{1}{b}} b^n = -n}$$

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ porque $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$

NOTA: La calculadora tiene dos logaritmos

a) El logaritmo decimal o de base **10**, **log** que cuando se lo escribe no se coloca la base, este me permite calcular logaritmos de cualquier número **n**, con **n > 0**

log 100 = 2 porque $10^2 = 100$

log 750 = 2,87506…. (el resultado es un número irracional, a los fines de los ejercicios tomaremos dos decimales con redondeo, es decir que si el tercer decimal es igual o mayor que 5, se aumenta el segundo en una unidad).

log 750 = 2,88

log 900 = 2,95

b) El logaritmo natural o neperiano: **ln** cuya base es el numero **e** (Número de nepper, **e** = 2,718281828……, siendo **e** un número irracional), en este logaritmo tampoco se escribe la base.

ln 1 = 0 porque $e^0 = 1$

ln 75 = 4,32

<u>Propiedades de los logaritmos</u>

La logaritmación **<u>no</u>** es distributiva con respecto a ninguna de las operaciones definidas en R

1) **Logaritmo de un producto:** es igual a la suma de los logaritmos de los factores en la misma base.

$$\mathbf{\log_b (a \bullet c) = \log_b a + \log_b c}$$

$\log_2 (64 \cdot 32)\ \log_2 64 + \log_2 32 = 6 + 5 = 11$

2) **Logaritmo de un cociente:** es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor en la misma base.

$$\mathbf{\log_b (a : c) = \log_b a - \log_b c}$$

$\log_3 (81 : 9) = \log_3 81 - \log 9 = 4 - 2 = 2$

$$\mathbf{\log_b} \left(\frac{a}{c}\right) \mathbf{= \log_b a - \log_b c}$$

$\log_2 \left(\frac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$

3) **Logaritmo de una potencia:** es igual al exponente de la potencia por el Logaritmo de la base de la potencia

$$\mathbf{\log_b (a^n) = n \bullet \log_b a}$$

$\log_3 9^5 = 5 \cdot \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

4) **Logaritmo de una raíz:** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$\mathbf{\log_b} \sqrt[n]{a} \mathbf{=} \frac{\log_b a}{n} \mathbf{=} \frac{1}{n} \mathbf{\bullet \log_b a}$$

$\log_2 \sqrt[3]{32} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 32 = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$

Cambio de base

Cuando el argumento no es una potencia de la base del logaritmo se hace un cambio de base para utilizar los logaritmos de la calculadora.

$$\log_b c = \frac{\log c}{\log b}$$

O tambien:

$$\log_b c = \frac{\ln c}{\ln b}$$

Ejemplo:

$$\log_3 75 = \frac{\log 75}{\log 3} = \frac{1{,}875}{0{,}477} = 3{,}93$$

$$\log_3 75 = \frac{\ln 75}{\ln 3} = \frac{4{,}317}{1{,}099} = 3{,}93$$

actividades

EJERCICIOS

1) $\log_2 (16 \cdot 8) + \log_3 (81 : 9) + \log_3 9^2 - \log_2 \sqrt{64} =$

2) $\log_2 (32 \cdot 4)^3 =$

3) $\log_3 \sqrt[3]{81:3} =$

4) $\log_2 (16 \cdot 2)^7 =$

5) $\log_5 100 =$

6) $\log_7 950 =$

7) $\log_{20} 200 =$

8) $\log_3 (27 \cdot 81) + \log_2 (4 : 32) - \log_5 25^8$

RESPUESTAS:

1) 10
2) 21
3) 1
4) 35
5) 2,86
6) 3,52
7) 1,77
8) −12

FUNCIÓN LOGARÍTMICA. REPRESENTACIÓN GRAFICA

La función logarítmica de base **a** es aquella función que asigna a cada número su logaritmo en base **a**.

Puesto que los números negativos no tienen logaritmo, la función logarítmica se define en el conjunto de los números reales positivos excluido el cero, y toma valores en el conjunto de los números reales.

$$f : \mathbf{R^+ - \{0\}} \rightarrow \mathbf{R} \;/\; \mathbf{x} \rightarrow f(x) = \boldsymbol{\log_a} x$$

$\mathbf{R^+ - \{0\}}$ Representa al conjunto de los números reales positivos, excluido el cero. $\mathbf{R^+ - \{0\} = (0 \,;\, +\infty)}$

En la representación gráfica de la función logarítmica conviene distinguir dos casos:

A) Función logarítmica de base mayor que 1:

a > 1

Representar gráficamente la función $y = \log_2 x$

Para facilitar la grafica, se toman valores del argumento (**x**) que sean sucesivamente 1, 2, 4, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, es decir que el argumento toma valores quesean potencias de la base **b** (b^0 , b^1, b^2 , b^{-1}, b^{-2}) , con estos 5 valores del argumento puedo graficar sin inconvenientes.

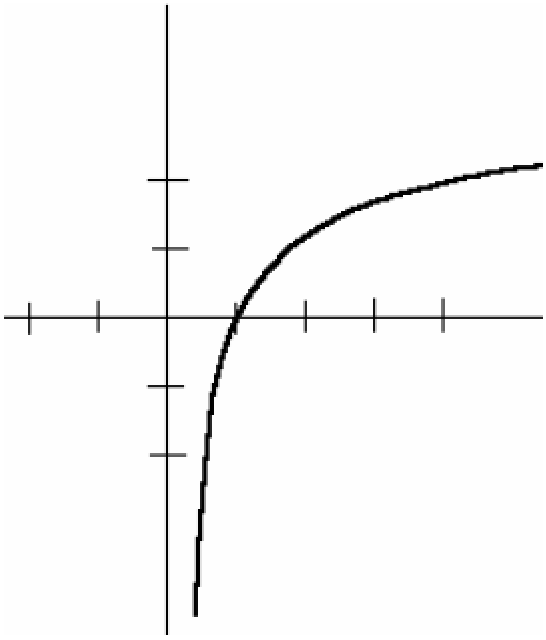
Para determinar por qué puntos pasa la función se elabora una tabla de valores:

x	y
1	0
2	1
4	2
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2

La representación gráfica pone de relieve los principales resultados sobre logaritmos:

- El logaritmo de 1 es cero: $\log_2 1 = 0$.
- El logaritmo de la base es la unidad: $\log_2 2 = 1$.
- Los números comprendidos entre 0 y 1 ($0 < x < 1$) tienen logaritmo negativo.
- Los números mayores que 1 ($x > 1$) tienen logaritmo positivo.
- La función es creciente.

La gráfica aproximada es:



El eje y (cuando x = 0) se denomina eje de las asíntotas, la curva se acerca indefinidamente a él pero nunca lo corta, pues debe ser x>o

Eje de asíntotas: x = 0

B) Función logarítmica de base menor que 1:

a < 1

Representa gráficamente $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

DESPLAZAMIENTO DEL EJE DE LAS ASÍNTOTAS (EJE X)

En la función $\log_b (x \pm a)$ hay un desplazamiento de **a** unidades a la izquierda si a es positiva y a unidades a la derecha si a es negativa, del eje de las asíntotas.

Ejemplo:

$y = \log_2 (x + 3)$

El argumento (x + 3) debe tomar valores 1, 2, 4, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

$x + 3 = 1 \Rightarrow x = 1 - 3 = -2$

$x + 3 = 2 \Rightarrow x = 2 - 3 = -1$

$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 4 - 3 = 1$

$x + 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

$x + 3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$

x	y
-2	0
-1	1
1	2
$-\frac{5}{2}$	**-1**

HACER LA GRAFICA EN BASE A LA TABLA

Eje de asíntotas **x = 3**

contenido

ECUACIONES LOGARÍTMICAS. RESOLUCION

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que la incógnita aparece en una expresión afectada por un logaritmo.

Así en la ecuación $2 \cdot \log x = 1 + \log (x - 0{,}9)$, en la que la incógnita x aparece tras el signo de logaritmo, es logarítmica.

Se efectúan todas las operaciones de pasajes de términos hasta llegar a la siguiente expresión:

$\mathbf{\log_b x = n}$ $\left\{\right.$ **n** puede tomar cualquier valor; 0, positivo o negativo, entero o fraccionario.

Y **aplicando la definición de logaritmo** resulta:

$\mathbf{b^n = x}$ ($\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$ definición)

Ejemplo 1:

$\mathbf{2\log_2 x + 4\log_2 x - 18 = 0}$

$6\log_2 x = 18$

$\log_2 x = 18 : 6$

$\log_2 x = 3$

$2^3 = x$

$\mathbf{8 = x}$

Nota: Los logaritmos de igual base y argumento se suman y restan al igual que las x en una ecuación lineal.

Ejemplo 2:

$\text{Log}_3\, x = -2$

$x = 3^{-2} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{9}}$

Ejemplo 3:

$\log_5 x = 0$

$x = 5^0 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$

Ejemplo 4:

$\log_2 x = \frac{1}{3}$

$x = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

<u>**Resolución por sustitucion:**</u>

$\mathbf{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 8 = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{\log_2^2 x = (\log_2 x)^2}$

Hacemos

$\log_2 x = \mathbf{z}$

$\log_2^2 x = \mathbf{z^2}$

Al sustituir resulta: $\mathbf{z^2 - 2z - 8 = 0}$

Resolviendo la ecuación cuadrática por Bascara obtenemos $\mathbf{z_1 = 4}$ y $\mathbf{z_2 = -2}$

En $\mathbf{\log_2 x = z}$ reemplazo z por z_1 y luego por z_2 y obtengo x_1 y x_2

$\mathbf{\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 \Rightarrow x_1 = 16}$

$\mathbf{\log_2 x = -2 \Rightarrow x = 2^{-2} \Rightarrow x_2 =} \frac{1}{4}$

actividades

EJERCICIOS:

1) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $3^x - 81 = 0$

b) $2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 48$

c) $5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^x = 775$

d) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

e) $15^x - 400 = 0$

f) $2 \cdot 8^x + 3 \cdot 8^x = 200$

g) $3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

h) $3^{x+2} + 3^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 270 = 0$

i) $9 \cdot 2^x - 50 = 4 \cdot 2^x + 30$

j) $2^{2x} = 8 \cdot 2^x - 15$

2) Resolver las siguientes ecuaciones logaritmicas.

a) $\log_2 x - 3 = 0$

b) $3\log_3 x + 4\log_3 x - 21 = 0$

c) $5\log_5 (x + 2) = 10$

d) $4\log_2 x + 2\log_2 x + 24 = 0$

e) $\log_2^2 x - 12\log_2 x + 32 = 0$

f) $2\log_5 x + 3\log_5 x - 1 = 0$

g) $7\log_2 (x + 3) = 3\log_2 (x + 3) + 12$

h) $2\log_7 \sqrt{x} + 2\log_7 \sqrt{x} = 4$

i) $2\log_2 (x + 5) + \log_2 (x + 5)^3 = 20$

j) $\log_2^2 x - 4\log_2 x - 12 = 0$

RESPUESTAS:

1)

a) $x = 4$

b) $x = 3$

c) $x = 2$

d) $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$

e) $x = 2{,}21$

f) $x = 1{,}77$

g) $x = 2$

h) $x = 3$

i) $x = 4$

j) $x_1 = 2{,}32$ y $x_2 = 1{,}58$

2)

a) $x = 8$

b) $x = 27$

c) $x = 23$

d) $x = \frac{1}{16}$

e) $x_1 = 256$ y $x_2 = 16$

f) $x = \sqrt[5]{5}$

g) $x = 5$

h) $x = 49$

i) $x = 11$

j) $x_1 = 64$ y $x_2 = \frac{1}{4}$

ECUACIONES EXPONENCIALES. RESOLUCIÓN

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece como exponente son ecuaciones exponenciales.

No hay ninguna fórmula general que indique cómo resolver cualquier ecuación exponencial. Sólo la práctica ayuda a decidir, en cada caso, qué camino tomar.

$\mathbf{a^x = b}$

Se puede resolver de dos formas distintas

1) <u>Por igualación de bases</u>

Si $\mathbf{b = a^n}$

Resulta $\mathbf{a^x = a^n}$ (si en una igualdad de potencias las bases son iguales, los exponentes necesariamente son iguales)

Si $a^x = a^n$

$\mathbf{x = n}$

<u>Ejemplo 1:</u>

$\mathbf{2^x = 8}$

$\mathbf{2^x = 2^3}$

$\mathbf{x = 3}$

<u>Ejemplo 2:</u>

Dada una expresión cualquiera se debe despejar $\mathbf{a^x}$, de la misma forma en que se despeja x en una ecuación cualquiera, de forma tal que me quede de un lado del signo = $\mathbf{a^x}$ y del otro lado un número.

$\mathbf{3^x - 9 = 0}$

$\mathbf{3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2}$

Ejemplo 3:

$3 \cdot 2^x - 48 = 0$

$3 \cdot 2^x = 48$

$2^x = 48 : 3$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

Ejemplo 4:

$3 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x - 160 = 0$

$5 \cdot 2^x = 160$

$2^x = 160 : 5$

$2^x = 32$

$2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

Nota: Es lo mismo que sumar 3x + 2x, solo puedo sumar los exponenciales si tienen la misma base y el mismo exponente.

Ejemplo 5:

$5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 8 = 0$ $\qquad$ $5^{x+2} = 5^x \cdot 5^2$

$5^x \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^x \cdot 5 = 8$ $\qquad$ $5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1$

$25 \cdot 5^x + 15 \cdot 5^x = 8$

$40 \cdot 5^x = 8$

$5^x = 8 : 40$

$5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$

Ejemplo 6:

Cambio de variable; resolución por sustitución

$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ (Aquí no puedo sumar porque los exponentes son distintos)

$2^{2x} = (2^x)^2$

Si hacemos la siguiente sustitución:

$2^x = z$

$2^{2x} = z^2$

Obtenemos: $z^2 - 6z + 8 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática por Bascara obtenemos: $z_1 = 4$ y $z_2 = 2$.

En $2^x = z$ reemplazo por z_1 y luego por z_2 y obtengo x_1 y x_2

$2^x = 4$

$2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$2^x = 2$

$2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$

Si al resolver la ecuación de segundo grado, los z toman valor 0 ó negativo, **no es solución de la ecuación exponencial,** pues la imagen de la función exponencial no puede tomar valores negativos ó 0.

$2^x = 0$

$2^x = -4$ **no tienen solución**

2) <u>Por aplicación de logaritmo</u>

$a^x = b$

$\log a^x = \log b$ Aplico log a cada miembro

$x \bullet \log a = \log b$ Aplico propiedades de log

$x = \frac{\log b}{\log a}$

Ejemplo 1:

$3^x - 27 = 0$

$3^x = 27$

$\log_3 3^x = \log_3 27$ Utilizo base 3 por ser 27 una potencia de 3

$x \bullet \log_3 3 = \log_3 27$

$x \bullet 1 = 3$

$x = 3$

Ejemplo 2:

Si el número no es una potencia de la base del exponente debo aplicar logaritmo decimal.

$$\mathbf{5^x = 50}$$

$$\mathbf{\log 5^x = \log 50}$$

$$\mathbf{x \bullet \log 5 = \log 50}$$

$$\mathbf{x =} \frac{\log 50}{\log 5} \mathbf{= 2{,}43}$$

_UNIDAD_2: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

MEDIDAS DE ÁNGULOS

La Trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, de las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos.

Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa.

Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en la física, química y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el sonido o el flujo de corriente alterna.

El concepto trigonométrico de ángulo es fundamental en el estudio de la trigonometría.

Un **ángulo trigonométrico** se genera con un radio que gira. Los radios OA y OB (figuras 1a, 1b y 1c) se consideran inicialmente coincidentes con OA. El radio OB gira hasta su posición final. A la posición de partida del radio se le llama **lado inicial** del ángulo, y a la posición de llegada del radio se le llama

lado final. Los lados inicial y final coinciden en un punto (punto O) llamado **vértice** del ángulo.

Un ángulo y su magnitud son positivos si se generan con un radio que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj (figura 1 A), y negativo si la rotación es en el sentido de las agujas del reloj (figura 1B).

Dos ángulos trigonométricos son iguales si sus rotaciones son de igual magnitud y en la misma dirección.

Figura 1A

Figura 1B

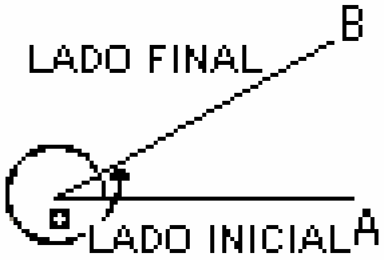


Figura 1C

SISTEMA DE MEDICION DE ANGULOS

En esta unidad vamos a ver dos sistemas de medición de ángulos, el sistema sexagesimal y el sistema circular, como así también la relación entre ellos y el pasaje de uno a otro.

1) Sistema sexagesimal

La unidad de medida en este sistema es el grado.

Se define al grado como la noventeava parte de un ángulo recto.

$$1° = \frac{1\,\text{ángulo recto}}{90} = \frac{90^{o}}{90}$$

1° = 60’ (Minutos)

1’ = 60” (Segundos)

2) Sistema circular

La unidad de medida en este sistema es el radián.

1 radian es el ángulo central de una circunferencia, para el cual la longitud “**s**” del arco de circunferencia es igual al **radio**. Figura 2

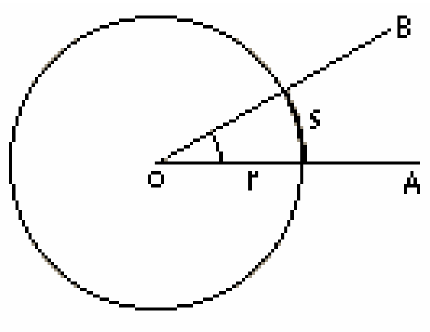


Figura 2

Si **s = r** la unidad angular es un radián.

En una circunferencia trigonométrica, el radio de la misma es 1, en consecuencia si el arco es el total de la circunferencia.

$\mathbf{s = 2\pi \bullet r}$ (Longitud de la circunferencia) y siendo **s = 1 giro**, es decir 360º y r = 1, resulta:

360º = 2π

$$\boxed{180^\circ = \pi}$$

Equivalencia que utilizaremos para pasar de un sistema de medición al otro.

π radianes ———————— 180º

1 radián ———————— x = $\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}14}$

1 radián = 57º 17' 45'' (aproximadamente)

<u>Pasaje de un sistema de medición a otro</u>

Se lo realiza mediante regla de tres simple.

Ejemplo 1:

Expresar en grados un ángulo de $\frac{3}{2}\pi$

π ———————— 180º

$\frac{3}{2}\pi$ ———————— **x =** $\frac{\frac{3}{2}\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 270^\circ$

Ejemplo 2

Expresar en radianes un ángulo de 210º.

180º ———————— π

210º ———————— x = $\frac{210^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{7}{6}\pi$

(Se simplifica 210 con 180, al pasar de grados a radianes no se efectúan las divisiones sino que se simplifican).

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas son valores sin unidades que dependen de la magnitud de un ángulo.

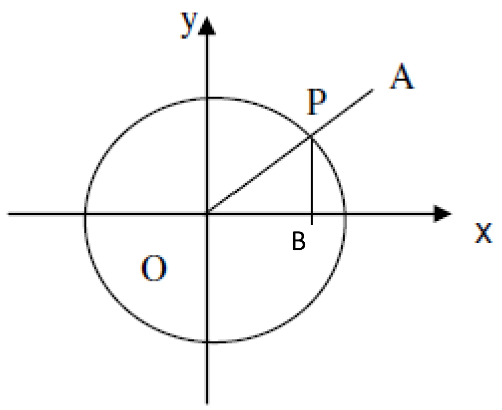


Figura 3

Para los fines de definición de tal ángulo y de sus funciones trigonométricas es conveniente usar el sistema coordenado rectangular.

Si a una recta que coincide con el eje X se la hace girar en el plano coordenado xy en torno del origen O a una posición OA, se dice que se ha generado un ángulo XOA = que tiene a OX por lado inicial y a OA por lado final.

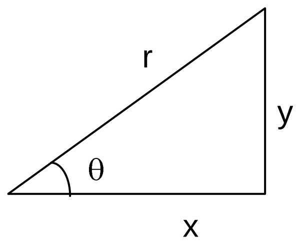
Si la rotación se hace en el sentido contrario a las agujas de un reloj, se dice que el ángulo es positivo; y si la rotación es en el mismo sentido de las agujas, se dice que el ángulo es negativo.

Sobre el lado final OA tomemos un punto cualquiera P diferente de O, y de coordenadas (x , y). Desde P bajemos una perpendicular PB al eje x.

El segmento de recta OP se llama radio vector, se designa por r, y se toma siempre como positivo.

En el triángulo OPB, (OB = x y PB = y) tienen los signos de las coordenadas del punto P, como está indicado para los cuatro cuadrantes.

Entonces, cualquiera que sea el cuadrante en que esté, las seis funciones trigonométricas se definen en magnitud y signo, por las siguientes razones:



- **seno de θ = sen θ = y / r**
- **coseno de θ = cos θ = x / r**
- **tangente de θ = tg θ = y / x**
- **cotangente de θ = cotg θ = x / y**
- **secante de θ = sec θ = r / x**
- **cosecante de θ = cosec θ = r / y**

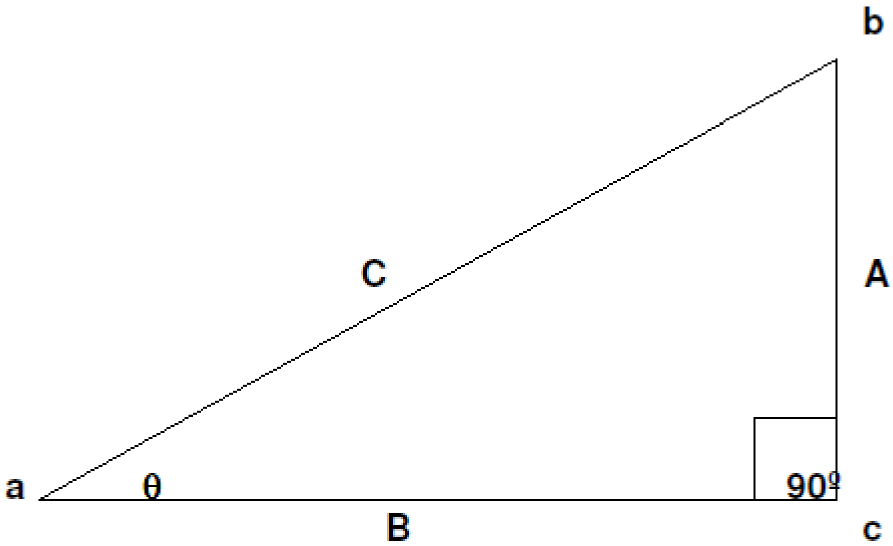
Dadas sus respectivas definiciones, tres funciones son las inversas de las otras tres, es decir:

$$\mathrm{cotg}\theta = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta}; \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}; \quad \mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\mathrm{sen}\theta}$$

Como se ha podido ver en los anteriores apartados, el valor de las funciones trigonométricas no depende de la longitud de r, pues las proporciones son sólo función del ángulo.

Debe observarse que tg θ y sec θ no están definidas cuando el lado final del ángulo está sobre el eje **y** (puesto que **x = 0**); mientras que cosec θ y cotg θ no están definidas cuando el lado final de θ está sobre el eje **x** (puesto que **y = 0**).

Si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, las definiciones de las funciones trigonométricas dadas más arriba se pueden aplicar a θ como se explica a continuación.



Si el vértice **a** estuviera situado en la intersección de los ejes x e y de la figura. Si **ac** descansara sobre la parte positiva del eje x y si **b** es el punto P de manera que **ab** = **OP** = **r**, entonces:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{C}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{C}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{A}{B}$$

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{B}{A}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{C}{B}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{C}{A}$$

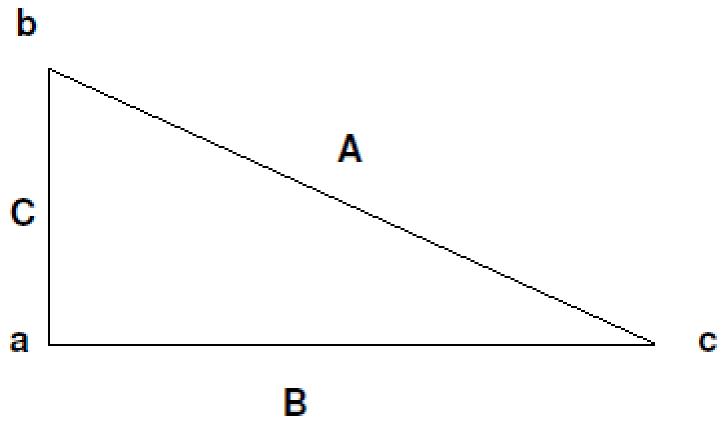
<u>Observación:</u>

El lado A es el cateto opuesto al ángulo θ.

El lado B es el cateto adyacente al ángulo θ.

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$A^2 = B^2 + C^2 \Rightarrow \begin{cases} B^2 = A^2 - C^2 \\ C^2 = A^2 - B^2 \end{cases}$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

Ejemplo:

B = 4 cm y C = 3 cm

$A^2 = (4cm)^2 + (3cm)^2$

$A = \sqrt{16cm^2 + 9cm^2} = \sqrt{25cm^2}$

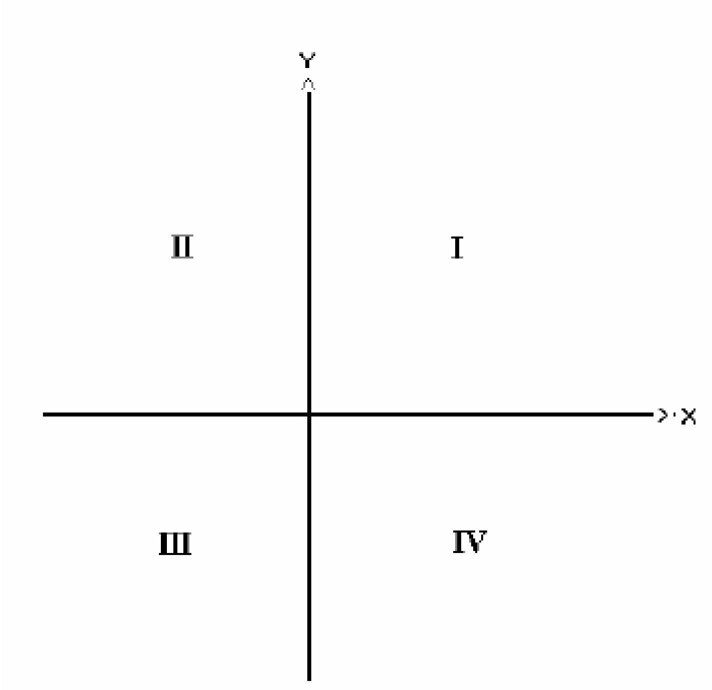
A = 5cm

contenido

SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS

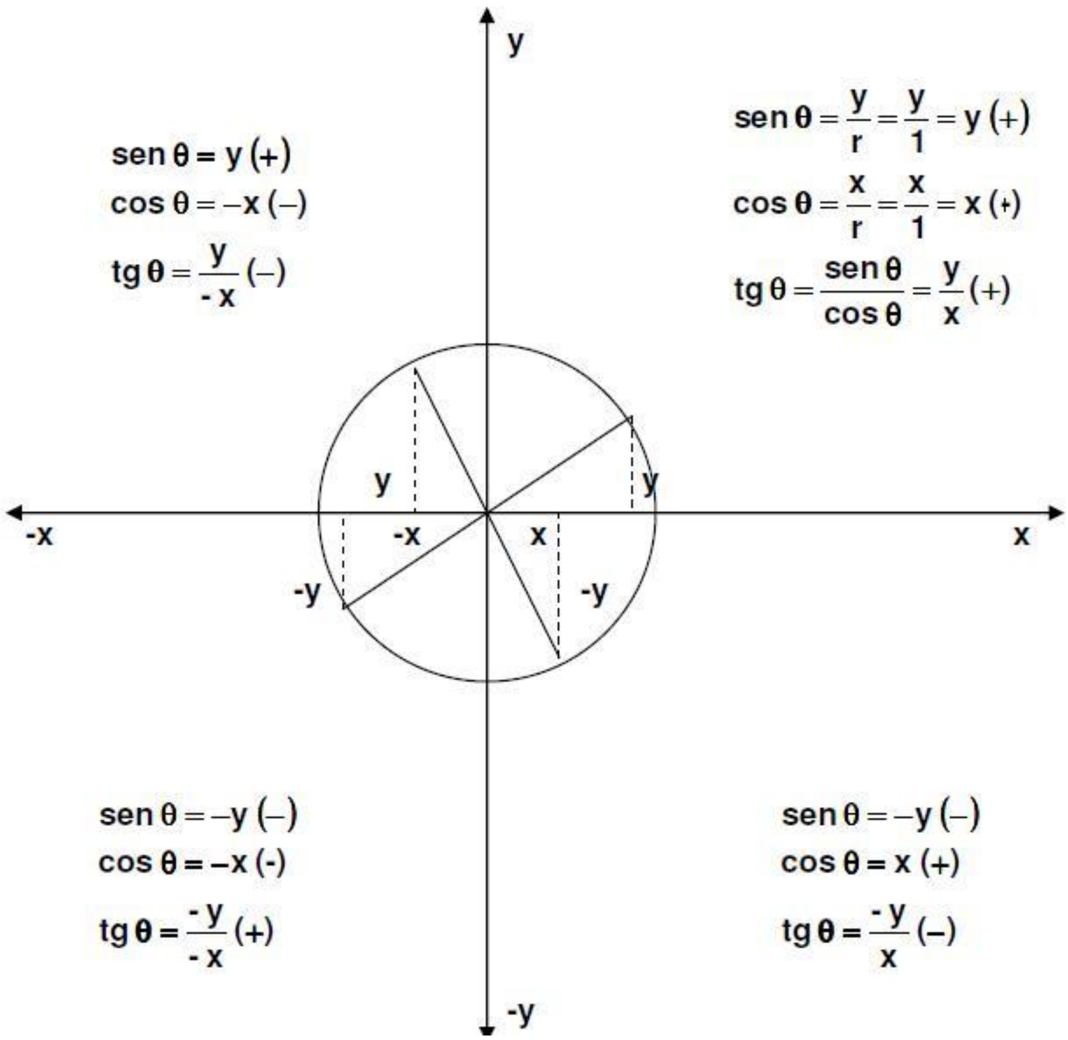
Dado un punto del plano P(x , y), el signo de sus coordenadas x e y depende del cuadrante en donde esté situado dicho punto P.

Sistema de cuadrantes:



- **Si P es del primer cuadrante, será de la forma: (+,+)** ej: (3,5)
- **Si P es del segundo cuadrante, será de la forma: (-,+)** ej: (-2,1)
- **Si P es del tercer cuadrante, será de la forma: (-,-)** ej: (-6,-2)
- **Si P es del cuarto cuadrante, será de la forma: (+,-)** ej: (1,-7)

El radio **r** en trigonometría se toma siempre positivo, y el valor igual a 1 (r = 1), luego los valores del **sen**, **cos** y **tg** están dados por los valores de **y** para el **sen**, **x** para el **cos**, $\frac{x}{y}$ para la **tg**.

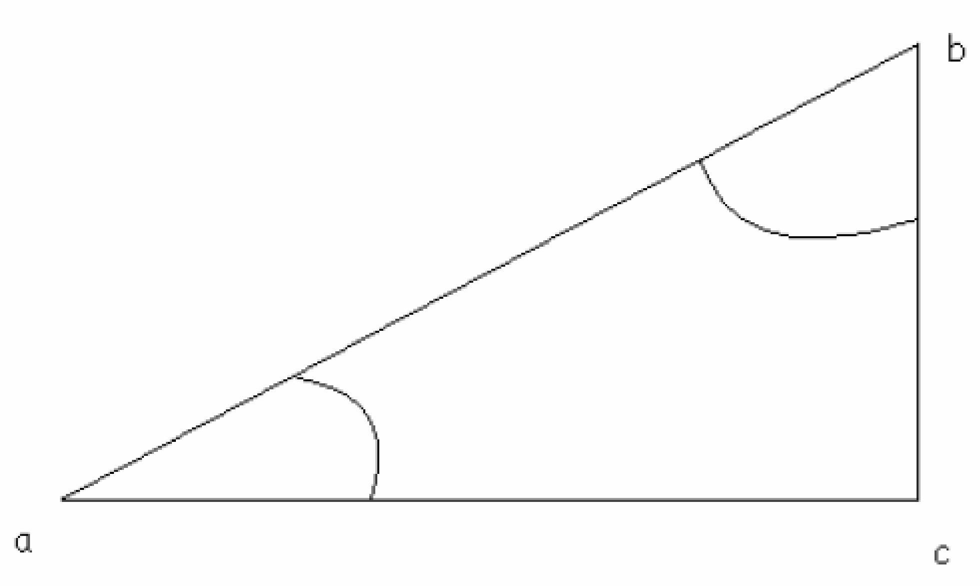


<u>En consecuencia, los signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes son:</u>

	1º	2º	3º	4º
SENO	+	+	-	-
COSENO	+	-	-	+
TANGENTE	+	-	+	-
COSECANTE	+	+	-	-
SECANTE	+	-	-	+
COTANGENTE	+	-	+	-

Observación: En algunos puntos frontera entre dos cuadrantes consecutivos, algunas razones trigonométricas no están definidas: cosec 0º, cotg 0º, tg 90º, sec 90º, cosec 180º, cotg 180º, tg 270º, sec 270º.

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS



$$\text{sen } a = \frac{\overline{bc}}{\overline{ba}} \qquad \text{sen } b = \frac{\overline{ac}}{\overline{ba}}$$

$$\cos a = \frac{\overline{ac}}{\overline{ba}} \qquad \cos b = \frac{\overline{bc}}{\overline{ba}}$$

$$\text{tg } a = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}} \qquad \text{tg } b = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$$

<u>Se observan las siguientes igualdades:</u>

sen a = cos b

cos a = sen b

<u>También la suma de los ángulos:</u>

a + b + c = 180° ⇒ a + b = 90° pues c = 90°

Por lo tanto, a y b son complementarios.

VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS PARTICULARES

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos se pueden obtener con facilidad.

Por ejemplo, en un triángulo rectángulo isósceles, se tiene que θ **= 45º** y que **b = a**, y además se sabe, por el Teorema de Pitágoras, que $\mathbf{c^2 = b^2 + a^2}$.

De aquí se deduce que $c^2 = 2a^2$ o que $c = a(2)^{1/2}$.

Por tanto:

sen 45º = cos 45º = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tg 45º = cotg 45º = 1

sec 45º = cosec 45º = $\sqrt{2}$

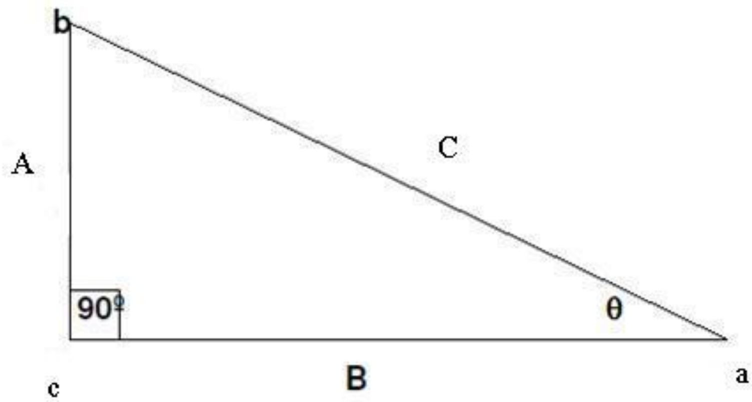
Se detalla ahora los valores de las funciones trigonométricas en los ángulos más comunes o representativos:

Radianes	Grados	sen θ	cos θ	tg θ
0	0º	0	1	0
$\pi/6$	30º	½	$½\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	45º	$½\sqrt{2}$	$½\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60º	$½\sqrt{3}$	½	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	90º	1	0	indefinida

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

1.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Consideremos el siguiente triángulo:



Resolver un triángulo consistirá en calcular los elementos que no se conocen, **incógnitas** a partir de otros conocidos, **datos**.

<u>Resolución de triángulos rectángulos</u>

- **Consideremos el triángulo rectángulo abc en el que $\hat{c}$ = 90º.**
- **Los ángulos b y a son dependientes porque $\hat{b} + \hat{a}$ = 90º.**

Esto se debe a una propiedad de los triángulos que dice que la suma de todos sus ángulos internos es de 180º.

Entonces: $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ **= 180º** Ya se conoce el valor de $\hat{c}$ **= 90º**. Por esto queda $\hat{b} + \hat{a}$ **= 90º**.

- **Los lados también son dependientes, pues $C^2 = B^2 + A^2$**

Resolver el triángulo rectángulo abc, es calcular los cinco elementos A, B, C, $\hat{b}$ y $\hat{a}$ a partir de dos de ellos que sean independientes. Se pueden presentar los siguientes casos:

1. **Dados los dos catetos.**
2. **Dados la hipotenusa y un cateto.**
3. **Dados un ángulo agudo y un cateto.**
4. **Dados un ángulo agudo y la hipotenusa.**

Vamos a ver a continuación como se resuelve cada uno de los casos:

1. <u>DADOS LOS DOS CATETOS</u>

Siendo **B = 4**$\sqrt{3}$ y **A = 4**.

Datos	Incógnitas
$\hat{c}$= 90º	C
B	$\hat{b}$
A	$\hat{a}$

Entonces: **C =** $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{16+16\cdot 3}=\sqrt{64}$ **= 8**

$$\operatorname{tg}\hat{b}=\frac{B}{A}=\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$$
$$\hat{b}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$$
$$\hat{b}=60º$$

$$\operatorname{tg}\hat{a}=\frac{A}{B}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\hat{a}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\hat{a}=30º$$

2. <u>DADOS LA HIPOTENUSA Y UN CATETO</u>

Siendo **C = 3**$\sqrt{2}$ y **B = 3.**

Datos	Incógnitas
$\hat{c} = 90^{\circ}$	A
C	$\hat{b}$
B	$\hat{a}$

Entonces: por el teorema de Pitágoras se tiene que:

A = $\sqrt{C^2 - B^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (3)^2} = \sqrt{9 \cdot 4 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Y de acuerdo con las inversas de las funciones trigonométricas se calculan las otras dos incógnitas:

$$\operatorname{sen}\hat{b} = \frac{B}{C} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\hat{a} = \frac{B}{C} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{b} = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \hat{a} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{b} = 45^{\circ} \qquad \hat{a} = 45^{\circ}$$

No olvidarse de la racionalización del denominador.

3. DADOS UN ÁNGULO AGUDO Y UN CATETO

Siendo $\hat{b}$ **= 30º** y **B = 5**. Entonces: $\hat{a}$ **= 90º - 30º = 60º**.

Datos	Incógnitas
$\hat{c} = 90^{\circ}$	C
$\hat{b}$	$\hat{a}$
B	A

$$\mathrm{tg}30^{o} = \frac{B}{A} = \frac{5}{A}$$
$$A = \frac{5}{\mathrm{tg}30^{o}} = \frac{5}{0{,}577}$$
$$A = 8{,}67$$

$$\mathrm{sen}30^{o} = \frac{B}{C} = \frac{5}{C}$$
$$C = \frac{5}{\mathrm{sen}30^{o}} = \frac{5}{0{,}5}$$
$$C = 10$$

4. DADOS UN ÁNGULO AGUDO Y LA HIPOTENUSA

Siendo $\hat{b}$ **= 60º** y **C = 6**. Entonces: $\hat{a}$ **= 90º - 60º = 30º**.

Datos	Incógnitas
$\hat{c}$ = 90ª	$\hat{a}$
$\hat{b}$	B
C	A

$$\mathrm{sen}60^{o} = \frac{B}{C} = \frac{B}{6}$$
$$6 \cdot \mathrm{sen}60^{o} = B$$
$$5{,}20 = B$$

$$\cos 60^{o} = \frac{A}{C} = \frac{A}{6}$$
$$6 \cdot \cos 60^{o} = A$$
$$3 = A$$

contenido

RELACIONES FUNDAMENTALES

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{cotg}\theta}$$

RELACIÓN PITAGÓRICA

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$$

Ejemplo de identidades trigonométricas

Ejemplo 1:

$$1+\mathrm{tg}^2\theta=\sec^2\theta$$

$$1+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

$$\sec^2\theta=\sec^2\theta$$

Ejemplo 2:

$$1+\mathrm{cotg}^2\theta=\mathrm{cosec}^2\theta$$

$$1+\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}=\mathrm{cosec}^2\theta$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}=\mathrm{cosec}^2\theta$$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}=\mathrm{cosec}^2\theta$$

$$\mathrm{cosec}^2\theta=\mathrm{cosec}^2\theta$$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN:

A. Razones de ángulos complementarios

- sen (90º ± θ) = cos θ
- cos (90º ± θ) = ± sen θ
- tg (90º ± θ) = ± cotg θ

B. Razones de ángulos suplementarios

- sen (180º ± θ) = ± sen θ
- cos (180º ± θ) = – cos θ
- tg (180º ± θ) = ± tg θ
- sen (270º ± θ) = – cos θ

- cos (270º ± θ) = ± sen θ
- tg (270º ± θ) = ± cotg θ

C. <u>Razones de ángulos opuestos</u>

- sen (360º ± θ) = ± sen θ
- cos (360º ± θ) = cos θ
- tg (360º ± θ) = ± tg θ

Ejemplos:

A) Si θ **= 45º** calcule su tangente por medio de relaciones trigonométricas.

Como **tg θ = sen θ /cos θ** entonces

sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tg 45º = 1

B) Sea el ángulo 378º. Calcule su seno.

A 378º lo puedo expresar como 360º + 18º. Entonces puedo usar la propiedad:

sen (360º ± θ) = ± sen θ

sen (360º + 18º) = sen 18º = 0.309......

<u>FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN</u>

- sen (x ± y) = sen x · cos y ± cos x · sen y;
- cos (x **–** y) = cos x · cos y **+** sen x · sen y;
- cos(x **+** y) = cos x · cos y **–** sen x · sen y
- tg (x ± y) = (tg x ± tg y) / (1 + tg x · tg y).

<u>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE</u>

- sen (2x) = 2 · sen x · cos x
- cos (2x) = $\cos^2$ x – sen^2 x = 1 – 2 · sen^2 x = 2 · $\cos^2$ x – 1
- tg (2x) = (2 · tg x) / (1 – tg^2 x).

TEOREMAS FUNDAMENTALES

A los triángulos que no son rectángulos se los denominan oblicuángulos, para la resolución de estos triángulos se utilizan el teorema del seno o el teorema del coseno, dependiendo de la terna de datos que tenga.

1.- TEOREMA DEL SENO

Este teorema es muy útil y práctico para resolver problemas de trigonometría, en los que el **triángulo no es rectángulo** y se conocen:

- dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

o

- dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

Se define de la siguiente manera:

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}}$$

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}}$$

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}}$$

$$\frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}}$$

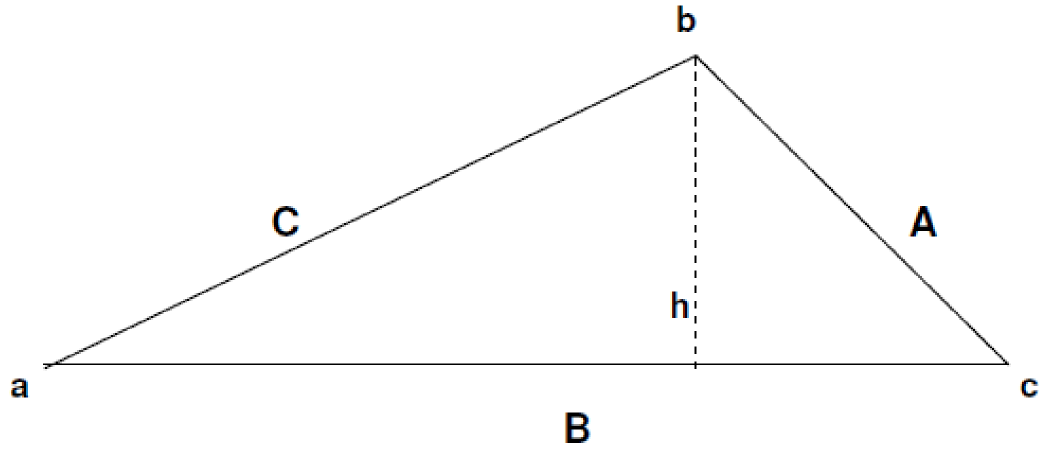
2.- TEOREMA DEL COSENO

Este teorema es muy útil y práctico para resolver problemas de trigonometría, en los que el **triángulo no es rectángulo** y se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre esos dos lados (el ángulo que forman los dos lados).

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\hat{c}$$

$$A^2 = C^2 + B^2 - 2 \cdot C \cdot B \cdot \cos\hat{a}$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2 \cdot A \cdot C \cdot \cos\hat{b}$$



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUANGULOS

Un triángulo queda determinado cuando se conocen tres cualesquiera de sus elementos, uno de los cuales al menos ha de ser lado.

Por tanto, el problema que vamos a resolver es el de calcular tres elementos de un triángulo, cuando se conocen los otros tres. Se pueden presentar cuatro casos:

1. Dados un lado y dos ángulos.

2. Dados dos lados y el ángulo que forman.

3. Dados los tres lados.

4. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Para hallar elementos desconocidos se deben utilizar siempre fórmulas en las que intervienen los datos y un elemento desconocido.

Procediendo así, los errores de aproximación que pueden darse al hallar los elementos desconocidos no influyen en los cálculos posteriores. Pero para que esto se pueda realizar necesitamos utilizar el teorema del seno, el del coseno y el de la tangente.

Como utilizaremos únicamente el teorema del seno y el del coseno, a veces para calcular elementos desconocidos, es imposible hacerlo utilizando únicamente los datos, y debemos echar mano de elementos hallados previamente.
54
Vamos a ver a continuación como se resuelve uno de los casos.

1. <u>DADOS UN LADO Y DOS ÁNGULOS.</u>

Datos	Incógnitas
A	$\hat{a}$ = 180ª-(B+C)
$\hat{b}$	B por Th. seno
$\hat{c}$	C por Th. seno

Cualesquiera que sean los datos con $\hat{a}+\hat{b}<180^{o}$, existe siempre solución y además única.

Siendo **A = 8,** $\hat{b}$ **= 45º y** $\hat{c}$ **= 60º**. Entonces: $\hat{a}$ **= 180 – (45º + 60º) = 75º**.

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}}=\frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}}\Rightarrow B\cdot\operatorname{sen}\hat{a}=A\cdot\operatorname{sen}\hat{b}\Rightarrow B=\frac{A\cdot\operatorname{sen}\hat{b}}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$

$$B=\frac{8\cdot\operatorname{sen}45^{o}}{\operatorname{sen}60^{o}}=6{,}53$$

$$\frac{A}{\text{sen }\hat{a}} = \frac{C}{\text{sen }\hat{c}} \Rightarrow C \cdot \text{sen }\hat{a} = A \cdot \text{sen }\hat{c} \Rightarrow C = \frac{A \cdot \text{sen }\hat{c}}{\text{sen }\hat{a}}$$

$$C = \frac{8 \cdot \text{sen } 60^{\circ}}{\text{sen } 45^{\circ}} = 9{,}80$$

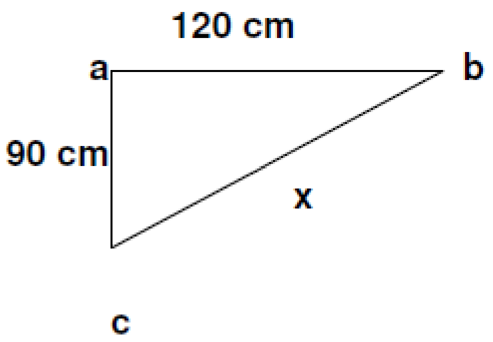
EJERCICIOS UNIDAD Nº 2

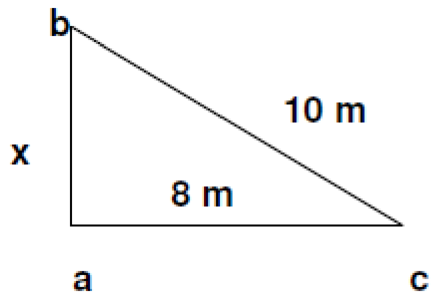
RESOLVER LOS SIGUIENTES TRIANGULOS RECTANGULOS

1. Disponemos de una escalera de 20m de longitud. La apoyamos en una pared a 15m de altura. ¿A qué distancia de la pared hemos situado la base de la escalera?¿cuál es el valor de los ángulos que la escalera forma con la pared y con el piso?.

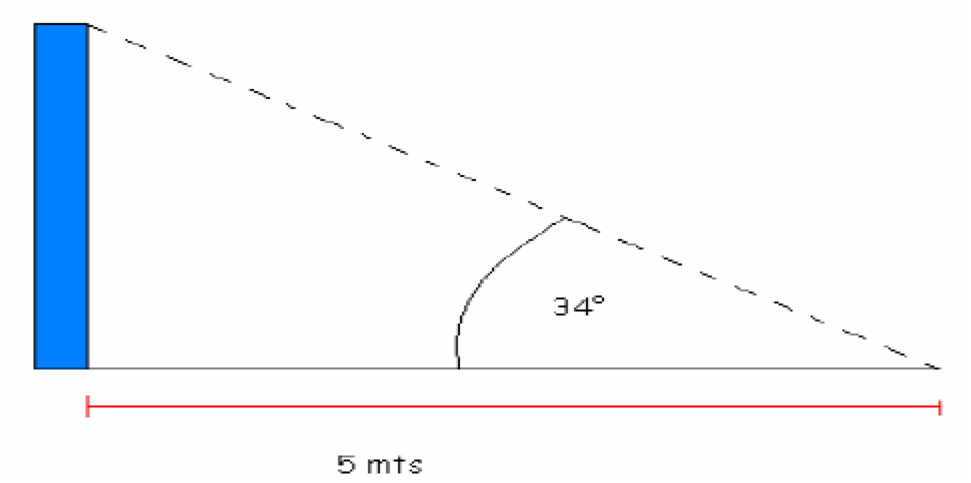
2. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 6cm de lado.

3. Usando el teorema de Pitágoras, calcular el valor del lado desconocido (**x**).

a) 

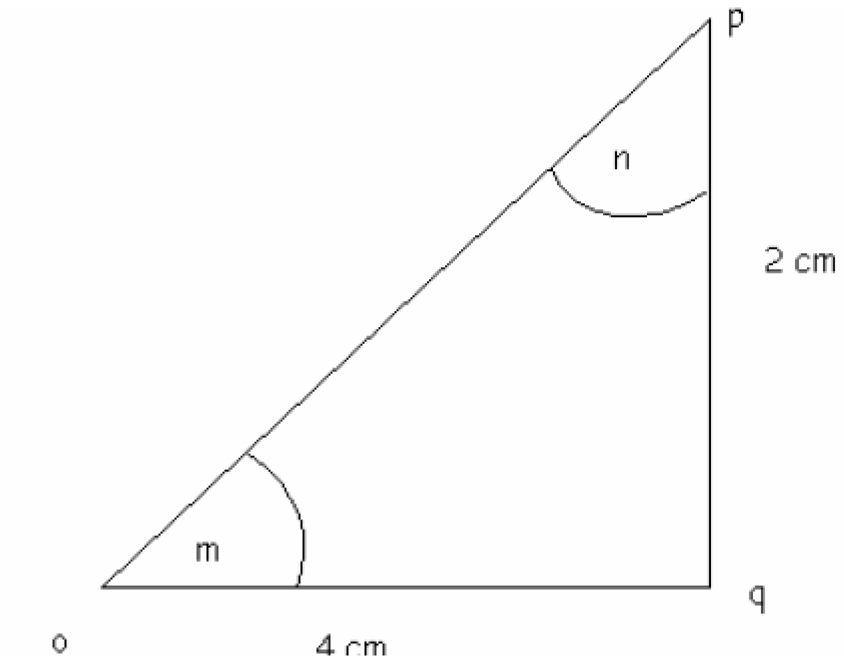
b) 

4. Calcular la altura del poste si se conocen la longitud de su sombra proyectada y el ángulo que los rayos del sol forman con el horizonte.



5. Calcular el sen α sabiendo que el cos α = 036. (utiliza teorema de Pitágoras) ¿Cuál es la amplitud de α?

6. Sea el siguiente triángulo rectángulo:



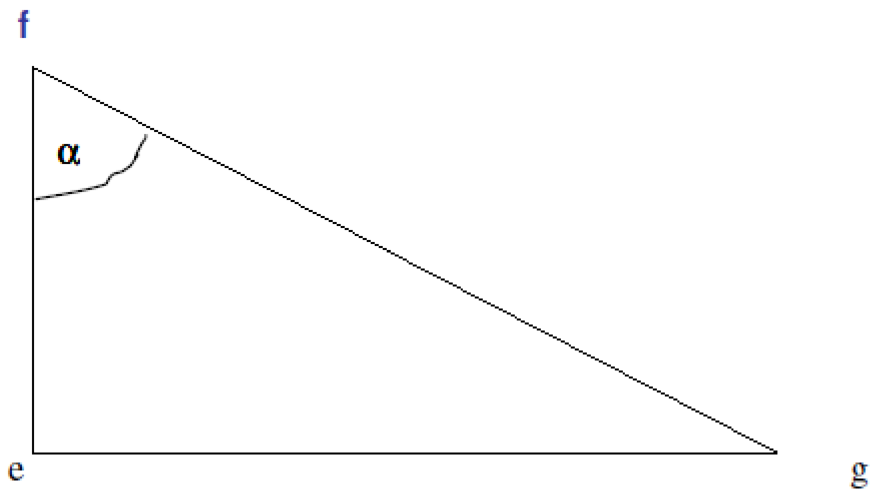
Calcular:

A) la longitud del segmento op.

B) La amplitud del ángulo m.

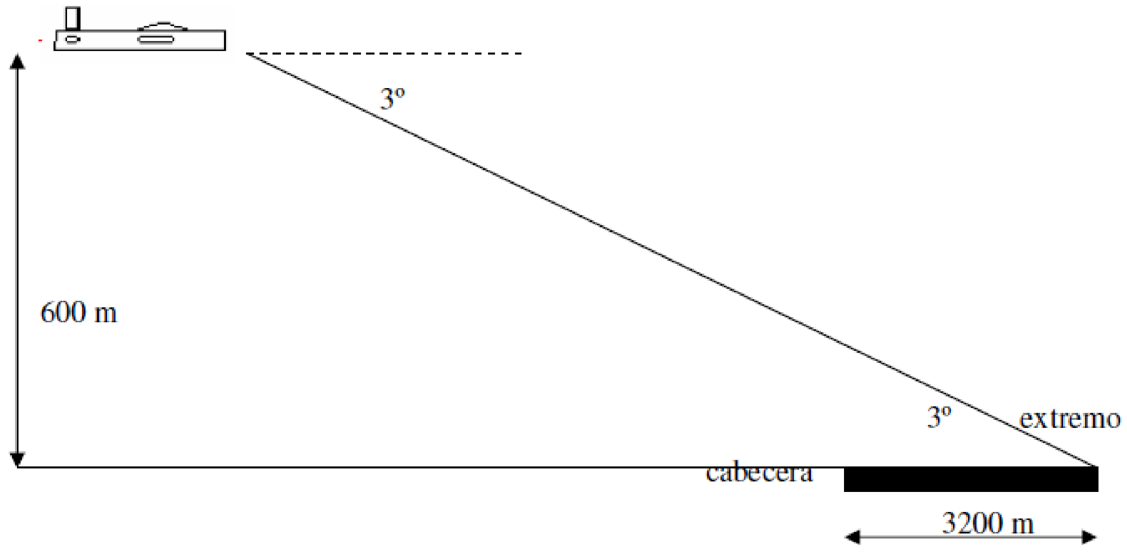
C) La amplitud del ángulo n.

7. Sea α = 52°. La longitud de fg = 6 cm



Calcular el área del triángulo (Área = base • altura / 2)

8. Desde un avión que vuela a 600 m de altura se observa el extremo de la pista de aterrizaje bajo un ángulo de 3°. Calcular la distancia que en ese instante del vuelo hay entre el avión y la cabecera de la pista.
Calcular también la distancia desde el avión hasta un punto situado en la vertical de la cabecera de la pista y a 600 m de altura. La longitud de la pista es de 3200 m.
Como ayuda va el gráfico. Usar también propiedades de ángulos.



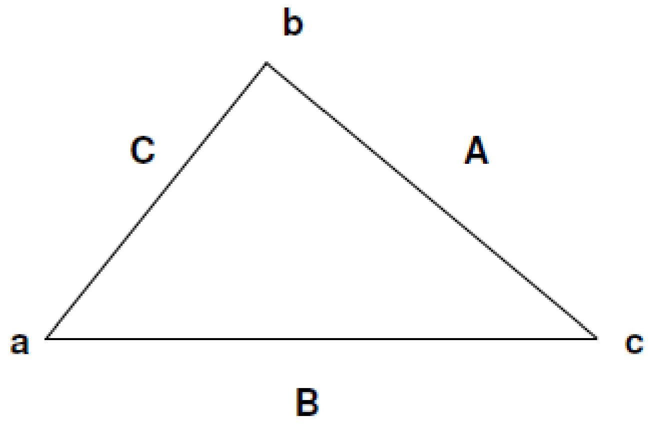
9. Un globo aerostático se encuentra entre dos ciudades A y B a una altura de 8Km. Desde A se lo observa con un ángulo de elevación de 50º y desde B con un ángulo de elevación de 30º. Calcular la distancia entre A y B.

10 .Una tormenta quiebra un árbol, la parte que queda en pie tiene 8,5m y la punta del árbol forma con la línea de la tierra un ángulo de 35º, Calcular la altura que tenía el árbol antes de quebrarse.

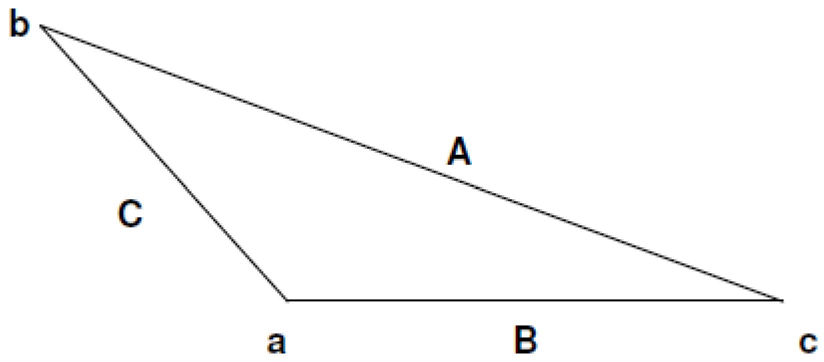
11. Un observador ubicado a 80m de la base de un edificio de departamentos, observa la terraza del mismo con un ángulo de elevación de 50º. Calcular la altura del edificio.

RESOLVER LOS SIGUIENTES TRIANGULOS OBLICUÁNGULOS

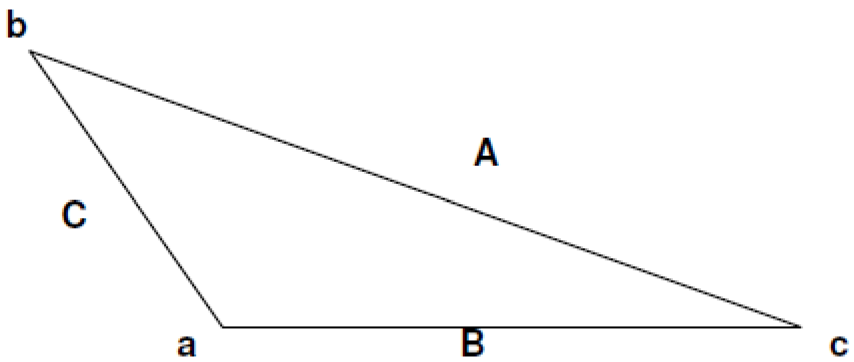
1. A = 15cm, B = 18cm y $\hat{a}$ = 38º. Calcular $\hat{b}$, $\hat{c}$ y C



2. A = 40cm , $\hat{a}$ = 120º y $\hat{c}$ = 25º. Calcular C , $\hat{b}$ y B



3. B = 20cm , C = 10cm y $\hat{a}$ = 120º. Calcular A , $\hat{b}$ y $\hat{c}$



4. Se desea calcular la distancia entre dos puntos A y B, inaccesibles entre si por un cordón montañoso. Desde un punto P ubicado a 8Km de A y 6Km de B, las líneas imaginarias que unen A con P y B con P forman un ángulo de 85º. Calcular la distancia de A a B.

5. En el triangulo oblicuángulo abc, el lado B mide 15cm, el ángulo $\hat{a}$ = 50º y el ángulo $\hat{c}$ = 70º . Calcular el valor de los lados A y C

RESPUESTAS EJERCICIOS UNIDAD Nº 2

TRIANGULOS RECTÁNGULOS

1. d = 13,23m
   ángulo con la pared = 41º24’35”
   ángulo con el piso =48º35’25”

2. h = 5,20cm

3. a) x = 150cm
   b) x = 6cm

4. h = 3,37m

5. sen α = 0,93
   α = 68º53’59”

6. a) $\overline{op}$ = 4,47cm
   b) $\hat{m}$ = 26º33’54”
   c) $\hat{n}$ = 63º26’6”

7. A = 8,73cm^2

8. Distancia avión-cabecera = 8270,47m
   Distancia avión-puntovertical = 8248,68m

9. Distancia $\overline{AB}$ = 20,57Km.

10. h = 23,32m

11. h = 95,34m

TRIANGULOS OBLICUANGULOS

1.

$\hat{b}$ = 47º37'44"

$\hat{c}$ = 94º22'16"

C =24,29cm

2. C = 19,52cm

$\hat{b}$ = 35º

B = 26,49cm

3. A = 26,46cm

$\hat{b}$ = 40º52'40"

$\hat{c}$ = 19º7'20"

4. Distancia $\overline{AB}$ = 9,57km

5. A = 13,27cm

C = 16,28cm

bibliografía

- Cálculo I, Larson y Hostetler, Ed McGraw Hill.
- Enciclopedia temática Océano.
- Apuntes universitarios:

  Repaso de trigonometría, cátedra de Análisis matemático I.